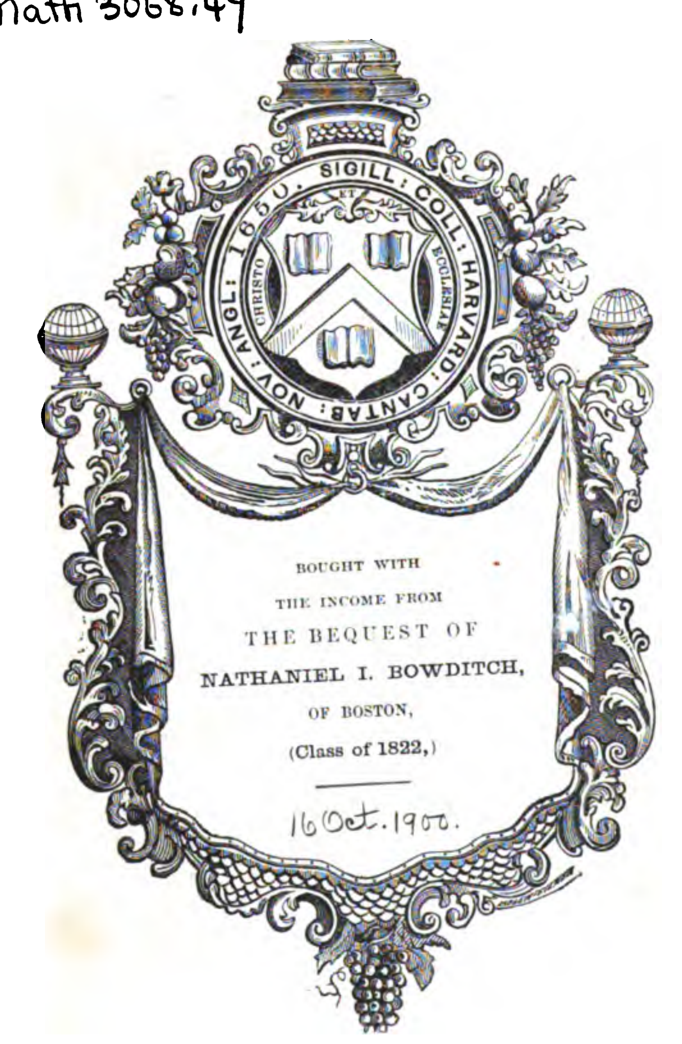

SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822,)
16 Oct. 1900.

Sammlung

von

INTEGRALTAFELN

zum Gebrauch

für den

Unterricht an der Königl. Allgemeinen Bauschule und dem Königl. Gewerbe-Institut.

Im Auftrage des Ministeriums für Handel, Gewerbe und öffentliche Arbeiten

bearbeitet

von

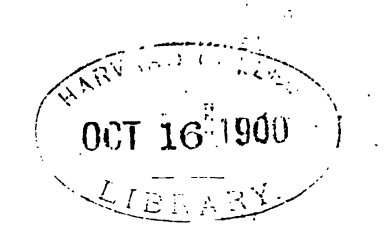
FERDINAND MINDING,

Doctor der Philosophie und Professor der Mathematik an der Universität zu Dorpat.

Berlin, 1849.

in Commission bei Carl Reimarus.

(Gropius'sche Buch- und Kunsthandlung.)


OCT 16 1900
LIBRARY.

Inhalt.

Erste Abtheilung.

Integrale rationaler Functionen von der Form $\int \frac{x^m \partial x}{X^\mu_1}$.

Zweite Abtheilung.

Integrale irrationaler algebraischer Functionen.

Dritte Abtheilung.

Integrale exponentieller und trigonometrischer Functionen.

Vierte Abtheilung.

Bestimmte Integrale und verschiedene Transscendenten.

Fünfte Abtheilung.

Elliptische Functionen.

Druckfehler und Verbesserungen.

Seite 3 Zeile 2 v. u. l. $\int_1^x$ statt $\int_1^\infty$

» 12 » 5 v. o. l. $\frac{15a^2X^4}{4}$ statt $\frac{15a^2X^3}{4}$

» 14 » 6 v. o. l. $\int \frac{\partial x}{x^2 X^3}$ statt $\int \frac{\partial x}{x^2 X}$

» 20 » 1 v. u. l. Arc. Cotang. $\frac{\sqrt{a}}{x\sqrt{-b}}$ statt Arc. Cotang. $x\sqrt{\frac{-b}{a}}$

» 26 » 3 v. u. l. m_λ statt m^λ

» 30 » 3 v. u. l. $\frac{b}{a^6 x^5}$ statt $\frac{b}{5a^6 x^5}$

» 51 » 6 v. o. l. $-\frac{1}{50aX}$ statt $+\frac{1}{50aX}$

» 59 » 11 v. o. l. P_μ statt P

Seite 67 Zeile 7 v. o. l. für $\nu =$ statt für $\lambda =$

» 79 » 1 v. u. l. $+$ (vor dem Ausdruck)

» 81 » 9 v. o. l. $-6c_0c_1c_2$ statt $-6c_1c_2c_3$, und $-\frac{8c_1^4}{9c_0}$ statt $-\frac{8c_1^3}{9c_0}$

» 87 » 5 v. o. l. $(-1)^\nu$ statt $(-1)\nu$

» 89 » 2 v. o. l. $2x^mX^n\sqrt{X}$ statt $2x^m\sqrt{X^nX}$

» 93 » 6 v. o. l. $\int\frac{X^n\partial x}{x^4\sqrt{X}}$ statt $\int\frac{X^n\partial x}{x^4\partial x}$

» 96 » 5 v. u. l. x^m statt x_m

» 101 » 5 v. o. l. Taf. XI. statt Taf. VIII.

» 104 » 7 v. u. l. Taf. XIII. statt Taf. X.

» 105 » 4 v. o. l. Taf. XI. statt Taf. VIII.

» 108 » 4 v. u. l. α_ν statt $\alpha\nu$

» 109 » 10 v. o. l. $-\frac{1}{x}$ statt $\frac{1}{-x}$

» 111 » 6 v. u. l. $a^{\frac{m}{n}+\frac{q}{r}}$ statt $a^{\frac{m}{n}+\frac{1}{r}}$

» 115 » 4 v. o. l. $n_{n'}$ statt $n^{n'}$

» 119 » 7 v. o. l. $\nu = m'-1$ statt $\nu = m'1$

» 120 » 2 v. u. l. $\frac{\text{Sin}\, x^{m+1}}{m+3}$ statt $\frac{\text{Sin}\, x^{m+1}}{m+1}$, und $\frac{2}{m+1}$ statt $\frac{2}{m+3}$

» 122 » 9 v. o. l. Formel, je nachdem statt Formel je nachden

» 130 » 2 v. o. l. Arc. Sin $\frac{\text{Sin}\, x\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\,\text{Cos}\, x}$ statt Arc Sin $\frac{\text{Sin}\, x\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\,\text{Cos}\, x}$

» 136 » 5 v. u. l. $(\nu-1)!$ statt $(\nu-1!)$, und $(\lambda-1)!$ statt $(\lambda-1!)$

» 146 » 3 v. u. l. XIX. statt XVII.

» 154 » 7 v. o. l. $(n-1)q$ statt $(n+1)q$

» 154 » 2 v. u. l. $(2\pi)^{q-1}$ statt $(2\pi)^{q-n}$

» 159 » 6 v. u. l. $\frac{\partial x}{x}$ statt ∂x

» 169 » 3 v. o. l. $\sum_1^x$ statt $\sum^x$

» 177 » 3 v. u. l. $\nu(\text{Cos}\,\vartheta$ statt $\nu\text{Cos}\,\vartheta$

» 183 » 9 v. o. l. $\Delta(c_1, \psi)^2$ statt $\Delta^2(c_1, \psi)$

» 183 » 11 v. o. l. $\Delta(c_1, \psi)^2$ statt $\Delta(c', \psi)^2$.

Einleitung.

Der um das Studium der Mathematik sehr verdiente Meyer Hirsch gab im Jahre 1810 die erste ausführliche Sammlung von Integral-Formeln heraus, welche als ein brauchbarer Anhang zu den Lehrbüchern Anerkennung fand und deren Auflage jetzt seit mehrern Jahren vergriffen ist. Bei Ausarbeitung dieser neuen Tafeln ist der im Unterrichte bewährte, auf stufenweisen Fortschritt vom Einfacheren zum Zusammengesetzteren gegründete Plan der früheren Tafeln im Ganzen beibehalten worden, jedoch mit wesentlichen Abänderungen, nämlich:

1. Das den Tafeln zu Grunde liegende System von allgemeinen Formeln ist in seinen einzelnen Gliedern mehr entwickelt und in das Ganze verwebt worden, indem theils jeder Tafel die ihr entsprechende allgemeine Formel, nach Umständen in mehrern Gestalten, vorangestellt ist, theils die mehrere Tafeln zugleich umfassenden Formeln an den gehörigen Orten eingeschaltet sind.

2. Die Zurückweisungen von einer Tafel auf die andere sind auf ein geringeres Maass beschränkt worden, um überall, so lange nicht allzu grosse Weitläufigkeit entstand, vollständig ausgerechnete Formeln vorzulegen.

3. Integrale, welche durch sehr nahe liegende Substitutionen in andere einfachere übergehen, sind unter der einfacheren Form aufzusuchen. Dies

gilt namentlich von den Formen $\int\frac{x^{m-1}\partial x}{a+bx^n}$, $\int\frac{x^{m-1}\partial x}{a+bx^n+cx^{2n}}$ in der ersten Abtheilung, welche man nur dann unmittelbar in den Tafeln findet, wenn m und n keinen gemeinschaftlichen Theiler haben; so dass z. B. $\int\frac{x\partial x}{a+bx^4}$ in der Form $\frac{1}{2}\int\frac{\partial y}{a+by^2}$, $\int\frac{\partial x}{x(a+bx^4)}$ in der Form $\frac{1}{4}\int\frac{\partial y}{y(a+by)}$ u. s. w. gefunden wird. Durch diese Unterscheidung werden viele störende Wiederholungen vermieden.

4. Mehrere Tafeln über bestimmte Integrale und andere wichtige, erst in neuester Zeit entstandene oder verbreitete, analytische Entwicklungen sind in der vierten und fünften Abtheilung hinzugefügt worden. Hier konnten auch die Beweise der Formeln nicht, wie in den anderen Abtheilungen — wo sie nämlich durch Differentiation der Integrale sich von selbst ergeben — übergangen werden; doch sind sie möglichst kurz gefasst worden, um die tabellarische Form, so weit es anging, auch hier zu bewahren.

Diese Form hat ihre eigenthümlichen Vorzüge, indem sie ohne viele Worte die Sache selbst sprechen lässt.

Zu den Vorkenntnissen, welche nöthig sind, um den Entwicklungen der Tafeln überall zu folgen, gehört besonders auch die Zerlegung algebraischer gebrochener Ausdrücke in einfache Brüche, mit welcher man sich nach Anleitung eines guten Lehrbuches ganz vertraut machen muss.

Bei Aufstellung der Integrale ist die willkürliche Constante, als sich von selbst verstehend, überall weggelassen worden. Bekanntlich ist bei der Bestimmung derselben einige Vorsicht nöthig, auf welche hier wiederholt aufmerksam zu machen nicht unnütz scheint, da über diesen Gegenstand in manchen Schriften sich noch Missverständnisse kundgeben. Hat man nämlich durch Integration gefunden $\int f(x)\partial x = \varphi(x) + \text{Const.}$, so ist nach der allgemeinen Regel $\int_a^x f(x)\partial x = \varphi(x) - \varphi(a)$; oder, wenn auch für die Grenze x ein bestimmter Werth gesetzt wird: $\int_a^b f(x)\partial x = \varphi(b) - \varphi(a)$. Diese Werthbestimmung ist richtig, wenn auf der ganzen Strecke von $x = a$ bis $x = b$ die

Function $\varphi(x)$ stetig fortgeht; wird aber diese Bedingung nicht erfüllt, so muss die Formel so geändert werden, dass die Stetigkeit des von a anfangenden Integralwerthes, so lange solcher überhaupt ein bestimmter ist, nirgends unterbrochen wird. Es sei $a < b$ und c ein Werth von x zwischen a und b, bei welchem die Function $\varphi(x)$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet, bei welchem also die Differenz $\varphi(c+v)-\varphi(c-u)$, wenn die positiven Grössen u und v kleiner als jede gegebene Grösse gedacht werden, um eine endliche Grösse von Null verschieden ist; so ist der wahre Ausdruck für das Integral $\int_a^b f(x)\partial x$, in so fern die Unterbrechung der Stetigkeit von $\varphi(x)$ bei c die einzige zwischen a und b ist, die Grenze, welcher sich für unendlich abnehmende positive u und v die Summe $\int_a^{c-u} f(x)\partial x + \int_{c+v}^b f(x)\partial x$ nähert, oder es ist

$$\int_a^b f(x)\partial x = \varphi(b)-\varphi(a)-[\varphi(c+v)-\varphi(c-u)] \text{ für } u=0, \quad v=0.$$

Da z. B. $\log x$ bei $x=0$ unstetig wird, so ist, wenn a und b positiv sind,
$\int_{-a}^{b}\frac{\partial x}{x} = \int_{-a}^{-u}\frac{\partial x}{x} + \int_{v}^{b}\frac{\partial x}{x} = \log\frac{bu}{av}$ für $u=0$, $v=0$; also ist dieser Integral-Werth gänzlich unbestimmt. Vergl. das Handbuch der Diff.- und Int.-Rechnung vom Herausgeber dieser Tafeln, S. 161 bis 164.

An verschiedenen Stellen sind die den trigonometrischen nachgebildeten hyperbolischen Functionen gebraucht worden, nämlich der hyperbolische Sinus, Cosinus, Tangens, Cotangens von x, bezeichnet durch Sin x, Cos x, Tang x, Cotang x. Man hat bekanntlich: $\text{Cos}\,x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\text{Sin}\,x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\text{Tang}\,x = \frac{\text{Sin}\,x}{\text{Cos}\,x}$, $\text{Cotang}\,x = \frac{\text{Cos}\,x}{\text{Sin}\,x}$. Ferner Arcus (Sinus $=x$) oder Arc. $\text{Sin}\,x = \log(x+\sqrt{x^2+1}) = \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{x^2+1}}$, Arc. $\text{Cos}\,x = \log(x+\sqrt{x^2-1})$

$$= \int_1^{\infty} \frac{\partial x}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \text{Arc. Tang}\,x = \tfrac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = \int_0^x \frac{\partial x}{1-x^2},$$

$$\text{Arc. Cotang}\,x = \tfrac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} = \int_x^{\infty}\frac{\partial x}{x^2-1}.$$

Die sonstigen Bezeichnungen sind die allgemein üblichen; also namentlich: das Product $1.2.3.4.....n = n!$, der Binomialcoefficient $\frac{m.m-1.m-2.....m-n+1}{1.\ 2.\ 3.\ ....\ n} = m_n$; mithin $(-m)_n = (-1)^n(m+n-1)_n$.

An einigen Stellen ist für ein Product aus n Factoren die Bezeichnung durch Π gebraucht, wonach $\prod_{\nu=1}^{\nu=n} f(\nu) = f(1).f(2).f(3)....f(n)$.

Die Summe $f(0)+f(1)+f(2)+....+f(n)$ ist durch $\sum_{\nu=0}^{\nu=n} f(\nu)$ bezeichnet; in dem Abschnitte über Summation der Progressionen (vierte Abtheilung) ist jedoch diese Bezeichnung so zu verstehen, dass das letzte Glied $f(n)$ von der Summe ausgeschlossen bleibt.

$\log x$ bezeichnet den natürlichen Logarithmus von x. e und π haben die gewöhnlichen Bedeutungen, also

$e = 2,718281828459....$ $\pi = 3,1415926535897....$

Für $\sqrt{-1}$ ist die Bezeichnung durch i gebraucht.

Erste Abtheilung.

Integrale rationaler Functionionen.

Tafel I.

$$X = a + bx.$$

Allgemeine Formel zu Tafel I bis VI.

$$\int \frac{x^m \partial x}{X^\mu} = \frac{1}{b^{m+1}} \int \frac{(X-a)^m \partial X}{X^\mu} = \frac{1}{b^{m+1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{m_\nu (-a)^\nu X^{m-\mu-\nu+1}}{m-\mu-\nu+1}.$$

Für $\nu = m - \mu + 1$ verwandelt sich das entsprechende Glied des vorstehenden Integrals in: $m_{\mu-1} \cdot (-a)^{m-\mu+1} \log X$.

$$\int \frac{\partial x}{X^\mu} = -\frac{1}{(\mu-1) b X^{\mu-1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X} = \frac{1}{b} \log X.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^2} = -\frac{1}{bX}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^3} = -\frac{1}{2bX^2}.$$

$$\int \frac{x \partial x}{X^\mu} = \frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{(\mu-2)X^{\mu-2}} + \frac{a}{(\mu-1)X^{\mu-1}}\right].$$

$$\int \frac{x \partial x}{X} = \frac{1}{b^2}\left[X - a \log X\right].$$

$$\int \frac{x \partial x}{X^2} = \frac{1}{b^2}\left[\log X + \frac{a}{X}\right].$$

$$\int \frac{x \partial x}{X^3} = \frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{X} + \frac{a}{2X^2}\right].$$

$$\int \frac{x \partial x}{X^4} = \frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{2X^2} + \frac{a}{3X^3}\right].$$

Tafel II.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^\mu} = \frac{1}{b^3}\left[-\frac{1}{(\mu-3)X^{\mu-3}} + \frac{2a}{(\mu-2)X^{\mu-2}} - \frac{a^2}{(\mu-1)X^{\mu-1}}\right].$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{X^2}{2} - 2aX + a^2 \log X\right].$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^2} = \frac{1}{b^3}\left[X - 2a \log X - \frac{a^2}{X}\right].$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^3} = \frac{1}{b^3}\left[\log X + \frac{2a}{X} - \frac{a^2}{2X^2}\right].$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^4} = \frac{1}{b^3}\left[-\frac{1}{X} + \frac{a}{X^2} - \frac{a^2}{3X^3}\right].$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^5} = \frac{1}{b^3}\left[-\frac{1}{2X^2} + \frac{2a}{3X^3} - \frac{a^2}{4X^4}\right].$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^6} = \frac{1}{b^3}\left[-\frac{1}{3X^3} + \frac{a}{2X^4} - \frac{a^2}{5X^5}\right].$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^7} = \frac{1}{b^3}\left[-\frac{1}{4X^4} + \frac{2a}{5X^5} - \frac{a^2}{6X^6}\right].$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^8} = \frac{1}{b^3}\left[-\frac{1}{5X^5} + \frac{a}{3X^6} - \frac{a^2}{7X^7}\right].$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^9} = \frac{1}{b^3}\left[-\frac{1}{6X^6} + \frac{2a}{7X^7} - \frac{a^2}{8X^8}\right].$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^{10}} = \frac{1}{b^3}\left[-\frac{1}{7X^7} + \frac{a}{4X^8} - \frac{a^2}{9X^9}\right].$$

Tafel III.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^\mu} = \frac{1}{b^4}\left[-\frac{1}{(\mu-4)X^{\mu-4}} + \frac{3a}{(\mu-3)X^{\mu-3}} - \frac{3a^2}{(\mu-2)X^{\mu-2}} + \frac{a^3}{(\mu-1)X^{\mu-1}}\right].$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X} = \frac{1}{b^4}\left[\frac{X^3}{3} - \frac{3aX^2}{2} + 3aX - a^3 \log X\right].$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^2} = \frac{1}{b^4}\left[\frac{X^2}{2} - 3aX + 3a^2 \log X + \frac{a^3}{X}\right].$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^3} = \frac{1}{b^4}\left[X - 3a \log X - \frac{3a^2}{X} + \frac{a^3}{2X^2}\right].$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^4} = \frac{1}{b^4}\left[\log X + \frac{3a}{X} - \frac{3a^2}{2X^2} + \frac{a^3}{3X^3}\right].$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^5} = \frac{1}{b^4}\left[-\frac{1}{X} + \frac{3a}{2X^2} - \frac{a^2}{X^3} + \frac{a^3}{4X^4}\right].$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^6} = \frac{1}{b^4}\left[-\frac{1}{2X^2} + \frac{a}{X^3} - \frac{3a^2}{4X^4} + \frac{a^3}{5X^5}\right].$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^7} = \frac{1}{b^4}\left[-\frac{1}{3X^3} + \frac{3a}{4X^4} - \frac{3a^2}{5X^5} + \frac{a^3}{6X^6}\right].$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^8} = \frac{1}{b^4}\left[-\frac{1}{4X^4} + \frac{3a}{5X^5} - \frac{a^2}{2X^6} + \frac{a^3}{7X^7}\right].$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^9} = \frac{1}{b^4}\left[-\frac{1}{5X^5} + \frac{a}{2X^6} - \frac{3a^2}{7X^7} + \frac{a^3}{8X^8}\right].$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^{10}} = \frac{1}{b^4}\left[-\frac{1}{6X^6} + \frac{3a}{7X^7} - \frac{3a^2}{8X^8} + \frac{a^3}{9X^9}\right].$$

Tafel IV.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^\mu} = \frac{1}{b^5}\left[-\frac{1}{(\mu-5)X^{\mu-5}} + \frac{4a}{(\mu-4)X^{\mu-4}} - \frac{6a^2}{(\mu-3)X^{\mu-3}} + \frac{4a^3}{(\mu-2)X^{\mu-2}} - \frac{a^4}{(\mu-1)X^{\mu-1}}\right].$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X} = \frac{1}{b^5}\left[\frac{X^4}{4} - \frac{4aX^3}{3} + 3a^2X^2 - 4a^3X + a^4 \log X\right].$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^2} = \frac{1}{b^5}\left[\frac{X^3}{3} - 2aX^2 + 6a^2X - 4a^3 \log X - \frac{a^4}{X}\right].$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^3} = \frac{1}{b^5}\left[\frac{X^2}{2} - 4aX + 6a^2 \log X + \frac{4a^3}{X} - \frac{a^4}{2X^2}\right].$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^4} = \frac{1}{b^5}\left[X - 4a \log X - \frac{6a^2}{X} + \frac{2a^3}{X^2} - \frac{a^4}{3X^3}\right].$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^5} = \frac{1}{b^5}\left[\log X + \frac{4a}{X} - \frac{3a^2}{X^2} + \frac{4a^3}{3X^3} - \frac{a^4}{4X^4}\right].$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^6} = \frac{1}{b^5}\left[-\frac{1}{X} + \frac{2a}{X^2} - \frac{2a^2}{X^3} + \frac{a^3}{X^4} - \frac{a^4}{5X^5}\right].$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^7} = \frac{1}{b^5}\left[-\frac{1}{2X^2} + \frac{4a}{3X^3} - \frac{3a^2}{2X^4} + \frac{4a^3}{5X^5} - \frac{a^4}{6X^6}\right].$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^8} = \frac{1}{b^5}\left[-\frac{1}{3X^3} + \frac{a}{X^4} - \frac{6a^2}{5X^5} + \frac{2a^3}{3X^6} - \frac{a^4}{7X^7}\right].$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^9} = \frac{1}{b^5}\left[-\frac{1}{4X^4} + \frac{4a}{5X^5} - \frac{a^2}{X^6} + \frac{4a^3}{7X^7} - \frac{a^4}{8X^8}\right].$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^{10}} = \frac{1}{b^5}\left[-\frac{1}{5X^5} + \frac{2a}{3X^6} - \frac{6a^2}{7X^7} + \frac{a^3}{2X^8} - \frac{a^4}{9X^9}\right].$$

Tafel V.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^\mu} = \frac{1}{b^6}\left[-\frac{1}{(\mu-6)X^{\mu-6}} + \frac{5a}{(\mu-5)X^{\mu-5}} - \frac{10a^2}{(\mu-4)X^{\mu-4}} + \frac{10a^3}{(\mu-3)X^{\mu-3}} - \frac{5a^4}{(\mu-2)X^{\mu-2}} + \frac{a^5}{(\mu-1)X^{\mu-1}}\right].$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X} = \frac{1}{b^6}\left[\frac{X^5}{5} - \frac{5aX^4}{4} + \frac{10a^2X^3}{3} - 5a^3X^2 + 5a^4X - a^5 \log X\right].$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^2} = \frac{1}{b^6}\left[\frac{X^4}{4} - \frac{5aX^3}{3} + 5a^2X^2 - 10a^3X + 5a^4 \log X + \frac{a^5}{X}\right].$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^3} = \frac{1}{b^6}\left[\frac{X^3}{3} - \frac{5aX^2}{2} + 10a^2X - 10a^3 \log X - \frac{5a^4}{X} + \frac{a^5}{2X^2}\right].$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^4} = \frac{1}{b^6}\left[\frac{X^2}{2} - 5aX + 10a^2 \log X + \frac{10a^3}{X} - \frac{5a^4}{2X^2} + \frac{a^5}{3X^3}\right].$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^5} = \frac{1}{b^6}\left[X - 5a \log X - \frac{10a^2}{X} + \frac{5a^3}{X^2} - \frac{5a^4}{3X^3} + \frac{a^5}{4X^4}\right].$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^6} = \frac{1}{b^6}\left[\log X + \frac{5a}{X} - \frac{5a^2}{X^2} + \frac{10a^3}{3X^3} - \frac{5a^4}{4X^4} + \frac{a^5}{5X^5}\right].$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^7} = \frac{1}{b^6}\left[-\frac{1}{X} + \frac{5a}{2X^2} - \frac{10a^2}{3X^3} + \frac{5a^3}{2X^4} - \frac{a^4}{X^5} + \frac{a^5}{6X^6}\right].$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^8} = \frac{1}{b^6}\left[-\frac{1}{2X^2} + \frac{5a}{3X^3} - \frac{5a^2}{2X^4} + \frac{2a^3}{X^5} - \frac{5a^4}{6X^6} + \frac{a^5}{7X^7}\right].$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^9} = \frac{1}{b^6}\left[-\frac{1}{3X^3} + \frac{5a}{4X^4} - \frac{2a^2}{X^5} + \frac{5a^3}{3X^6} - \frac{5a^4}{7X^7} + \frac{a^5}{8X^8}\right].$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{X^{10}} = \frac{1}{b^6}\left[-\frac{1}{4X^4} + \frac{a}{X^5} - \frac{5a^2}{3X^6} + \frac{10a^3}{7X^7} - \frac{5a^4}{8X^8} + \frac{a^5}{9X^9}\right].$$

Tafel VI.

$$X = a + bx.$$

$$\int\frac{x^6\,\partial x}{X^\mu} = \frac{1}{b^7}\Big[-\frac{1}{(\mu-7)X^{\mu-7}}+\frac{6a}{(\mu-6)X^{\mu-6}}-\frac{15a^2}{(\mu-5)X^{\mu-5}}+\frac{20a^3}{(\mu-4)X^{\mu-4}}$$
$$-\frac{15a^4}{(\mu-3)X^{\mu-3}}+\frac{6a^5}{(\mu-2)X^{\mu-2}}-\frac{a^6}{(\mu-1)X^{\mu-1}}\Big].$$

$$\int\frac{x^6\,\partial x}{X} = \frac{1}{b^7}\Big[\frac{X^6}{6}-\frac{6aX^5}{5}+\frac{15a^2X^4}{4}-\frac{20a^3X^3}{3}+\frac{15a^4X^2}{2}-6a^5X+a^6\log X\Big].$$

$$\int\frac{x^6\,\partial x}{X^2} = \frac{1}{b^7}\Big[\frac{X^5}{5}-\frac{3aX^4}{2}+5a^2X^3-10a^3X^2+15a^4X-6a^5\log X-\frac{a^6}{X}\Big].$$

$$\int\frac{x^6\,\partial x}{X^3} = \frac{1}{b^7}\Big[\frac{X^4}{4}-2aX^3+\frac{15a^2X^2}{2}-20a^3X+15a^4\log X+\frac{6a^5}{X}-\frac{a^6}{2X^2}\Big].$$

$$\int\frac{x^6\,\partial x}{X^4} = \frac{1}{b^7}\Big[\frac{X^3}{3}-3aX^2+15a^2X-20a^3\log X-\frac{15a^4}{X}+\frac{3a^5}{X^2}-\frac{a^6}{3X^3}\Big].$$

$$\int\frac{x^6\,\partial x}{X^5} = \frac{1}{b^7}\Big[\frac{X^2}{2}-6aX+15a^2\log X+\frac{20a^3}{X}-\frac{15a^4}{2X^2}+\frac{2a^5}{X^3}-\frac{a^6}{4X^4}\Big].$$

$$\int\frac{x^6\,\partial x}{X^6} = \frac{1}{b^7}\Big[X-6a\log X-\frac{15a^2}{X}+\frac{10a^3}{X^2}-\frac{5a^4}{X^3}+\frac{3a^5}{2X^4}-\frac{a^6}{5X^5}\Big].$$

$$\int\frac{x^6\,\partial x}{X^7} = \frac{1}{b^7}\Big[\log X+\frac{6a}{X}-\frac{15a^2}{2X^2}+\frac{20a^3}{3X^3}-\frac{15a^4}{4X^4}+\frac{6a^5}{5X^5}-\frac{a^6}{6X^6}\Big].$$

$$\int\frac{x^6\,\partial x}{X^8} = \frac{1}{b^7}\Big[-\frac{1}{X}+\frac{3a}{X^2}-\frac{5a^2}{X^3}+\frac{5a^3}{X^4}-\frac{3a^4}{X^5}+\frac{a^5}{X^6}-\frac{a^6}{7X^7}\Big].$$

$$\int\frac{x^6\,\partial x}{X^9} = \frac{1}{b^7}\Big[-\frac{1}{2X^2}+\frac{2a}{X^3}-\frac{15a^2}{4X^4}+\frac{4a^3}{X^5}-\frac{5a^4}{2X^6}+\frac{6a^5}{7X^7}-\frac{a^6}{8X^8}\Big].$$

$$\int\frac{x^6\,\partial x}{X^{10}} = \frac{1}{b^7}\Big[-\frac{1}{3X^3}+\frac{3a}{2X^4}-\frac{3a^2}{X^5}+\frac{10a^3}{3X^6}-\frac{15a^4}{7X^7}+\frac{3a^5}{4X^8}-\frac{a^6}{9X^9}\Big].$$

Tafel VII.

$$X = a + bx.$$

Allgemeine Formel zu Tafel VII bis XIII.

$$\int \frac{\partial x}{x^m X^\mu} = (-b)^{m-1} \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-2} \frac{(m+\nu-1)_\nu}{(\mu-\nu-1)a^{m+\nu}X^{\mu-\nu-1}} + \sum_{\nu=0}^{\nu=m-2} \frac{(-1)^{\nu+1}(\mu+\nu-1)_\nu b^\nu}{(m-\nu-1)a^{\mu+\nu}x^{m-\nu-1}}$$

$$+ (-1)^m (m+\mu-2)_{\mu-1} \frac{b^{m-1}}{a^{m+\mu-1}} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^\mu} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-2} \frac{1}{(\mu-\nu-1)a^{\nu+1}X^{\mu-\nu-1}} - \frac{1}{a^\mu} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX} = -\frac{1}{a} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^2} = \frac{1}{aX} - \frac{1}{a^2} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^3} = \frac{1}{2aX^2} + \frac{1}{a^2X} - \frac{1}{a^3} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^4} = \frac{1}{3aX^3} + \frac{1}{2a^2X^2} + \frac{1}{a^3X} - \frac{1}{a^4} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^5} = \frac{1}{4aX^4} + \frac{1}{3a^2X^3} + \frac{1}{2a^3X^2} + \frac{1}{a^4X} - \frac{1}{a^5} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^6} = \frac{1}{5aX^5} + \frac{1}{4a^2X^4} + \frac{1}{3a^3X^3} + \frac{1}{2a^4X^2} + \frac{1}{a^5X} - \frac{1}{a^6} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^7} = \frac{1}{6aX^6} + \frac{1}{5a^2X^5} + \frac{1}{4a^3X^4} + \frac{1}{3a^4X^3} + \frac{1}{2a^5X^2} + \frac{1}{a^6X} - \frac{1}{a^7} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^8} = \frac{1}{7aX^7} + \frac{1}{6a^2X^6} + \frac{1}{5a^3X^5} + \frac{1}{4a^4X^4} + \frac{1}{3a^5X^3} + \frac{1}{2a^6X^2} + \frac{1}{a^7X} - \frac{1}{a^8} \log \frac{X}{x}.$$

Tafel VIII.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^\mu} = -b \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-2} \frac{\nu+1}{(\mu-\nu-1)a^{\nu+2}X^{\mu-\nu-1}} - \frac{1}{a^\mu x} + \frac{\mu b}{a^{\mu+1}} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^2} = -\frac{b}{a^2 X} - \frac{1}{a^2 x} + \frac{2b}{a^3} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^3} = -\frac{b}{2a^2 X^2} - \frac{2b}{a^3 X} - \frac{1}{a^3 x} + \frac{3b}{a^4} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^4} = -\frac{b}{3a^2 X^3} - \frac{b}{a^3 X^2} - \frac{3b}{a^4 X} - \frac{1}{a^4 x} + \frac{4b}{a^5} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^5} = -\frac{b}{4a^2 X^4} - \frac{2b}{3a^3 X^3} - \frac{3b}{2a^4 X^2} - \frac{4b}{a^5 X} - \frac{1}{a^5 x} + \frac{5b}{a^6} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^6} = -\frac{b}{5a^2 X^5} - \frac{b}{2a^3 X^4} - \frac{b}{a^4 X^3} - \frac{2b}{a^5 X^2} - \frac{5b}{a^6 X} - \frac{1}{a^6 x} + \frac{6b}{a^7} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^7} = -\frac{b}{6a^2 X^6} - \frac{2b}{5a^3 X^5} - \frac{3b}{4a^4 X^4} - \frac{4b}{3a^5 X^3} - \frac{5b}{2a^6 X^2} - \frac{6b}{a^7 X} - \frac{1}{a^7 x} + \frac{7b}{a^8} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^8} = -\frac{b}{7a^2 X^7} - \frac{b}{3a^3 X^6} - \frac{3b}{5a^4 X^5} - \frac{b}{a^5 X^4} - \frac{5b}{3a^6 X^3} - \frac{3b}{a^7 X^2} - \frac{7b}{a^8 X} - \frac{1}{a^8 x} + \frac{8b}{a^9} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^9} = -\frac{b}{8a^2 X^8} - \frac{2b}{7a^3 X^7} - \frac{b}{2a^4 X^6} - \frac{4b}{5a^5 X^5} - \frac{5b}{4a^6 X^4} - \frac{2b}{a^7 X^3} - \frac{7b}{2a^8 X^2} - \frac{8b}{a^9 X}$$
$$- \frac{1}{a^9 x} + \frac{9b}{a^{10}} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^{10}} = -\frac{b}{9a^2 X^9} - \frac{b}{4a^3 X^8} - \frac{3b}{7a^4 X^7} - \frac{2b}{3a^5 X^6} - \frac{b}{a^6 X^5} - \frac{3b}{2a^7 X^4} - \frac{7b}{3a^8 X^3} - \frac{4b}{a^9 X^2}$$
$$- \frac{9b}{a^{10} X} - \frac{1}{a^{10} x} + \frac{10b}{a^{11}} \log \frac{X}{x}.$$

Tafel IX.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^\mu} = b^2 \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-2} \frac{(\nu+2)_2}{(\mu-\nu-1)a^{\nu+3} X^{\mu-\nu-1}} - \frac{1}{2a^\mu x^2} + \frac{\mu b}{a^{\mu+1} x} - \frac{(\mu+1)_2 b^2}{a^{\mu+2}} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X} = -\frac{1}{2ax^2} + \frac{b}{a^2 x} - \frac{b^2}{a^3} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^2} = \frac{b^2}{a^3 X} - \frac{1}{2a^2 x^2} + \frac{2b}{a^3 x} - \frac{3b^2}{a^4} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^3} = \frac{b^2}{2a^3 X^2} + \frac{3b^2}{a^4 X} - \frac{1}{2a^3 x^2} + \frac{3b}{a^4 x} - \frac{6b^2}{a^5} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^4} = \frac{b^2}{3a^3 X^3} + \frac{3b^2}{2a^4 X^2} + \frac{6b^2}{a^5 X} - \frac{1}{2a^4 x^2} + \frac{4b}{a^5 x} - \frac{10b^2}{a^6} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^5} = \frac{b^2}{4a^3 X^4} + \frac{b^2}{a^4 X^3} + \frac{3b^2}{a^5 X^2} + \frac{10b^2}{a^6 X} - \frac{1}{2a^5 x^2} + \frac{5b}{a^6 x} - \frac{15b^2}{a^7} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^6} = \frac{b^2}{5a^3 X^5} + \frac{3b^2}{4a^4 X^4} + \frac{2b^2}{a^5 X^3} + \frac{5b^2}{a^6 X^2} + \frac{15b^2}{a^7 X} - \frac{1}{2a^6 x^2} + \frac{6b}{a^7 x} - \frac{21b^2}{a^8} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^7} = \frac{b^2}{6a^3 X^6} + \frac{3b^2}{5a^4 X^5} + \frac{3b^2}{2a^5 X^4} + \frac{10b^2}{3a^6 X^3} + \frac{15b^2}{2a^7 X^2} + \frac{21b^2}{a^8 X} - \frac{1}{2a^7 x^2} + \frac{7b}{a^8 x}$$
$$- \frac{28b^2}{a^9} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^8} = \frac{b^2}{7a^3 X^7} + \frac{b^2}{2a^4 X^6} + \frac{6b^2}{5a^5 X^5} + \frac{5b^2}{2a^6 X^4} + \frac{5b^2}{a^7 X^3} + \frac{21b^2}{2a^8 X^2} + \frac{28b^2}{a^9 X} - \frac{1}{2a^8 x^2}$$
$$+ \frac{8b}{a^9 x} - \frac{36b^2}{a^{10}} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^9} = \frac{b^2}{8a^3 X^8} + \frac{3b^2}{7a^4 X^7} + \frac{b^2}{a^5 X^6} + \frac{2b^2}{a^6 X^5} + \frac{15b^2}{4a^7 X^4} + \frac{7b^2}{a^8 X^3} + \frac{14b^2}{a^9 X^2} + \frac{36b^2}{a^{10} X}$$
$$- \frac{1}{2a^9 x^2} + \frac{9b}{a^{10} x} - \frac{45b^2}{a^{11}} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^{10}} = \frac{b^2}{9a^3 X^9} + \frac{3b^2}{8a^4 X^8} + \frac{6b^2}{7a^5 X^7} + \frac{5b^2}{3a^6 X^6} + \frac{3b^2}{a^7 X^5} + \frac{21b^2}{4a^8 X^4} + \frac{28b^2}{3a^9 X^3} + \frac{18b^2}{a^{10} X^2}$$
$$+ \frac{45b^2}{a^{11} X} - \frac{1}{2a^{10} x^2} + \frac{10b}{a^{11} x} - \frac{55b^2}{a^{12}} \log \frac{X}{x}.$$

Tafel X.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^\mu} = -b^3 \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-2} \frac{(\nu+3)_3}{(\mu-\nu-1)a^{\nu+4} X^{\mu-\nu-1}} - \frac{1}{3a^\mu x^3} + \frac{\mu b}{2a^{\mu+1}x^2} - \frac{(\mu+1)_2 b^2}{a^{\mu+2}x} + \frac{(\mu+2)_3 b^3}{a^{\mu+3}} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X} = -\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{2a^2x^2} - \frac{b^2}{a^3x} + \frac{b^3}{a^4} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^2} = -\frac{b^3}{a^4X} - \frac{1}{3a^2x^3} + \frac{b}{a^3x^2} - \frac{3b^2}{a^4x} + \frac{4b^3}{a^5} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^3} = -\frac{b^3}{2a^4X^2} - \frac{4b^3}{a^5X} - \frac{1}{3a^3x^3} + \frac{3b}{2a^4x^2} - \frac{6b^2}{a^5x} + \frac{10b^3}{a^6} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^4} = -\frac{b^3}{3a^4X^3} - \frac{2b^3}{a^5X^2} - \frac{10b^3}{a^6X} - \frac{1}{3a^4x^3} + \frac{2b}{a^5x^2} - \frac{10b^2}{a^6x} + \frac{20b^3}{a^7} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^5} = -\frac{b^3}{4a^4X^4} - \frac{4b^3}{3a^5X^3} - \frac{5b^3}{a^6X^2} - \frac{20b^3}{a^7X} - \frac{1}{3a^5x^3} + \frac{5b}{2a^6x^2} - \frac{15b^2}{a^7x} + \frac{35b^3}{a^8} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^6} = -\frac{b^3}{5a^4X^5} - \frac{b^3}{a^5X^4} - \frac{10b^3}{3a^6X^3} - \frac{10b^3}{a^7X^2} - \frac{35b^3}{a^8X} - \frac{1}{3a^6x^3} + \frac{3b}{a^7x^2} - \frac{21b^2}{a^8x} + \frac{56b^3}{a^9} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^7} = -\frac{b^3}{6a^4X^6} - \frac{4b^3}{5a^5X^5} - \frac{5b^3}{2a^6X^4} - \frac{20b^3}{3a^7X^3} - \frac{35b^3}{2a^8X^2} - \frac{56b^3}{a^9X} - \frac{1}{3a^7x^3} + \frac{7b}{2a^8x^2} - \frac{28b^2}{a^9x} + \frac{84b^3}{a^{10}} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^8} = -\frac{b^3}{7a^4X^7} - \frac{2b^3}{3a^5X^6} - \frac{2b^3}{a^6X^5} - \frac{5b^3}{a^7X^4} - \frac{35b^3}{3a^8X^3} - \frac{28b^3}{a^9X^2} - \frac{84b^3}{a^{10}X} - \frac{1}{3a^8x^3} + \frac{4b}{a^9x^2} - \frac{36b^2}{a^{10}x} + \frac{120b^3}{a^{11}} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^9} = -\frac{b^3}{8a^4X^8} - \frac{4b^3}{7a^5X^7} - \frac{5b^3}{3a^6X^6} - \frac{4b^3}{a^7X^5} - \frac{35b^3}{4a^8X^4} - \frac{56b^3}{3a^9X^3} - \frac{42b^3}{a^{10}X^2} - \frac{120b^3}{a^{11}X} - \frac{1}{3a^9x^3} + \frac{9b}{2a^{10}x^2} - \frac{45b^2}{a^{11}x} + \frac{165b^3}{a^{12}} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^{10}} = -\frac{b^3}{9a^4X^9} - \frac{b^3}{2a^5X^8} - \frac{10b^3}{7a^6X^7} - \frac{10b^3}{3a^7X^6} - \frac{7b^3}{a^8X^5} - \frac{14b^3}{a^9X^4} - \frac{28b^3}{a^{10}X^3} - \frac{60b^3}{a^{11}X^2} - \frac{165b^3}{a^{12}X} - \frac{1}{3a^{10}x^3} + \frac{5b}{a^{11}x^2} - \frac{55b^2}{a^{12}x} + \frac{220b^3}{a^{13}} \log \frac{X}{x}.$$

Tafel XI.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^\mu} = b^4 \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-2} \frac{(\nu+4)_4}{(\mu-\nu-1)a^{\nu+5} X^{\mu-\nu-1}} - \frac{1}{4a^\mu x^4} + \frac{\mu b}{3a^{\mu+1}x^3} - \frac{(\mu+1)_2 b^2}{2a^{\mu+2}x^2} + \frac{(\mu+2)_3 b^3}{a^{\mu+3}x} - \frac{(\mu+3)_4 b^4}{a^{\mu+4}} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X} = -\frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{3a^2x^3} - \frac{b^2}{2a^3x^2} + \frac{b^3}{a^4x} - \frac{b^4}{a^5} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^2} = \frac{b^4}{a^5 X} - \frac{1}{4a^2x^4} + \frac{2b}{3a^3x^3} - \frac{3b^2}{2a^4x^2} + \frac{4b^3}{a^5x} - \frac{5b^4}{a^6} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^3} = \frac{b^4}{2a^5 X^2} + \frac{5b^4}{a^6 X} - \frac{1}{4a^3x^4} + \frac{b}{a^4x^3} - \frac{3b^2}{a^5x^2} + \frac{10b^3}{a^6x} - \frac{15b^4}{a^7} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^4} = \frac{b^4}{3a^5 X^3} + \frac{5b^4}{2a^6 X^2} + \frac{15b^4}{a^7 X} - \frac{1}{4a^4x^4} + \frac{4b}{3a^5x^3} - \frac{5b^2}{a^6x^2} + \frac{20b^3}{a^7x} - \frac{35b^4}{a^8} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^5} = \frac{b^4}{4a^5 X^4} + \frac{5b^4}{3a^6 X^3} + \frac{15b^4}{2a^7 X^2} + \frac{35b^4}{a^8 X} - \frac{1}{4a^5x^4} + \frac{5b}{3a^6x^3} - \frac{15b^2}{2a^7x^2} + \frac{35b^3}{a^8x} - \frac{70b^4}{a^9} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^6} = \frac{b^4}{5a^5 X^5} + \frac{5b^4}{4a^6 X^4} + \frac{5b^4}{a^7 X^3} + \frac{35b^4}{2a^8 X^2} + \frac{70b^4}{a^9 X} - \frac{1}{4a^6x^4} + \frac{2b}{a^7x^3} - \frac{21b^2}{2a^8x^2} + \frac{56b^3}{a^9x} - \frac{126b^4}{a^{10}} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^7} = \frac{b^4}{6a^5 X^6} + \frac{b^4}{a^6 X^5} + \frac{15b^4}{4a^7 X^4} + \frac{35b^4}{3a^8 X^3} + \frac{35b^4}{a^9 X^2} + \frac{126b^4}{a^{10} X} - \frac{1}{4a^7x^4} + \frac{7b}{3a^8x^3} - \frac{14b^2}{a^9x^2} + \frac{84b^3}{a^{10}x} - \frac{210b^4}{a^{11}} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^8} = \frac{b^4}{7a^5 X^7} + \frac{5b^4}{6a^6 X^6} + \frac{3b^4}{a^7 X^5} + \frac{35b^4}{4a^8 X^4} + \frac{70b^4}{3a^9 X^3} + \frac{63b^4}{a^{10} X^2} + \frac{210b^4}{a^{11} X} - \frac{1}{4a^8x^4} + \frac{8b}{3a^9x^3} - \frac{18b^2}{a^{10}x^2} + \frac{120b^3}{a^{11}x} - \frac{330b^4}{a^{12}} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^9} = \frac{b^4}{8a^5 X^8} + \frac{5b^4}{7a^6 X^7} + \frac{5b^4}{2a^7 X^6} + \frac{7b^4}{a^8 X^5} + \frac{35b^4}{2a^9 X^4} + \frac{42b^4}{a^{10} X^3} + \frac{105b^4}{a^{11} X^2} + \frac{330b^4}{a^{12} X} - \frac{1}{4a^9x^4} + \frac{3b}{a^{10}x^3} - \frac{45b^2}{2a^{11}x^2} + \frac{165b^3}{a^{12}x} - \frac{495b^4}{a^{13}} \log \frac{X}{x}.$$

Tafel XII.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^\mu} = -b^5 \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-2} \frac{(\nu+5)_5}{(\mu-\nu-1)a^{\nu+6} X^{\mu-\nu-1}} - \frac{1}{5a^\mu x^5} + \frac{\mu b}{4a^{\mu+1}x^4} - \frac{(\mu+1)_2 b^2}{3a^{\mu+2}x^3} + \frac{(\mu+2)_3 b^3}{2a^{\mu+3}x^2} - \frac{(\mu+3)_4 b^4}{a^{\mu+4}x} + \frac{(\mu+4)_5 b^5}{a^{\mu+5}} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X} = -\frac{1}{5ax^5} + \frac{b}{4a^2x^4} - \frac{b^2}{3a^3x^3} + \frac{b^3}{2a^4x^2} - \frac{b^4}{a^5x} + \frac{b^5}{a^6} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^2} = -\frac{b^5}{a^6X} - \frac{1}{5a^2x^5} + \frac{b}{2a^3x^4} - \frac{b^2}{a^4x^3} + \frac{2b^3}{a^5x^2} - \frac{5b^4}{a^6x} + \frac{6b^5}{a^7} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^3} = -\frac{b^5}{2a^6X^2} - \frac{6b^5}{a^7X} - \frac{1}{5a^3x^5} + \frac{3b}{4a^4x^4} - \frac{2b^2}{a^5x^3} + \frac{5b^3}{a^6x^2} - \frac{15b^4}{a^7x} + \frac{21b^5}{a^8} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^4} = -\frac{b^5}{3a^6X^3} - \frac{3b^5}{a^7X^2} - \frac{21b^5}{a^8X} - \frac{1}{5a^4x^5} + \frac{b}{a^5x^4} - \frac{10b^2}{3a^6x^3} + \frac{10b^3}{a^7x^2} - \frac{35b^4}{a^8x} + \frac{56b^5}{a^9} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^5} = -\frac{b^5}{4a^6X^4} - \frac{2b^5}{a^7X^3} - \frac{21b^5}{2a^8X^2} - \frac{56b^5}{a^9X} - \frac{1}{5a^5x^5} + \frac{5b}{4a^6x^4} - \frac{5b^2}{a^7x^3} + \frac{35b^3}{2a^8x^2} - \frac{70b^4}{a^9x} + \frac{126b^5}{a^{10}} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^6} = -\frac{b^5}{5a^6X^5} - \frac{3b^5}{2a^7X^4} - \frac{7b^5}{a^8X^3} - \frac{28b^5}{a^9X^2} - \frac{126b^5}{a^{10}X} - \frac{1}{5a^6x^5} + \frac{3b}{2a^7x^4} - \frac{7b^2}{a^8x^3} + \frac{28b^3}{a^9x^2} - \frac{126b^4}{a^{10}x} + \frac{252b^5}{a^{11}} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^7} = -\frac{b^5}{6a^6X^6} - \frac{6b^5}{5a^7X^5} - \frac{21b^5}{4a^8X^4} - \frac{56b^5}{3a^9X^3} - \frac{63b^5}{a^{10}X^2} - \frac{252b^5}{a^{11}X} - \frac{1}{5a^7x^5} + \frac{7b}{4a^8x^4} - \frac{28b^2}{3a^9x^3} + \frac{42b^3}{a^{10}x^2} - \frac{210b^4}{a^{11}x} + \frac{462b^5}{a^{12}} \log \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^8} = -\frac{b^5}{7a^6X^7} - \frac{b^5}{a^7X^6} - \frac{21b^5}{5a^8X^5} - \frac{14b^5}{a^9X^4} - \frac{42b^5}{a^{10}X^3} - \frac{126b^5}{a^{11}X^2} - \frac{462b^5}{a^{12}X} - \frac{1}{5a^8x^5} + \frac{2b}{a^9x^4} - \frac{12b^2}{a^{10}x^3} + \frac{60b^3}{a^{11}x^2} - \frac{330b^4}{a^{12}x} + \frac{792b^5}{a^{13}} \log \frac{X}{x}.$$

Tafel XIII.

$$X = a + bx.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^7X^\mu} = b^6\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-2}\frac{(\nu+6)_6}{(\mu-\nu-1)a^{\nu+7}X^{\mu-\nu-1}} - \frac{1}{6a^\mu x^6} + \frac{\mu b}{5a^{\mu+1}x^5} - \frac{(\mu+1)_2 b^2}{4a^{\mu+2}x^4}$$
$$+ \frac{(\mu+2)_3 b^3}{3a^{\mu+3}x^3} - \frac{(\mu+3)_4 b^4}{2a^{\mu+4}x^2} + \frac{(\mu+4)_5 b^5}{a^{\mu+5}x} - \frac{(\mu+5)_6 b^6}{a^{\mu+6}}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^7X} = -\frac{1}{6ax^6} + \frac{b}{5a^2x^5} - \frac{b^2}{4a^3x^4} + \frac{b^3}{3a^4x^3} - \frac{b^4}{2a^5x^2} + \frac{b^5}{a^6x} - \frac{b^6}{a^7}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^7X^2} = \frac{b^6}{a^7X} - \frac{1}{6a^2x^6} + \frac{2b}{5a^3x^5} - \frac{3b^2}{4a^4x^4} + \frac{4b^3}{3a^5x^3} - \frac{5b^4}{2a^6x^2} + \frac{6b^5}{a^7x} - \frac{7b^6}{a^8}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^7X^3} = \frac{b^6}{2a^7X^2} + \frac{7b^6}{a^8X} - \frac{1}{6a^3x^6} + \frac{3b}{5a^4x^5} - \frac{3b^2}{2a^5x^4} + \frac{10b^3}{3a^6x^3} - \frac{15b^4}{2a^7x^2} + \frac{21b^5}{a^8x}$$
$$- \frac{28b^6}{a^9}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^7X^4} = \frac{b^6}{3a^7X^3} + \frac{7b^6}{2a^8X^2} + \frac{28b^6}{a^9X} - \frac{1}{6a^4x^6} + \frac{4b}{5a^5x^5} - \frac{5b^2}{2a^6x^4} + \frac{20b^3}{3a^7x^3} - \frac{35b^4}{2a^8x^2}$$
$$+ \frac{56b^5}{a^9x} - \frac{84b^6}{a^{10}}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^7X^5} = \frac{b^6}{4a^7X^4} + \frac{7b^6}{3a^8X^3} + \frac{14b^6}{a^9X^2} + \frac{84b^6}{a^{10}X} - \frac{1}{6a^5x^6} + \frac{b}{a^6x^5} - \frac{15b^2}{4a^7x^4} + \frac{35b^3}{3a^8x^3}$$
$$- \frac{35b^4}{a^9x^2} + \frac{126b^5}{a^{10}x} - \frac{210b^6}{a^{11}}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^7X^6} = \frac{b^6}{5a^7X^5} + \frac{7b^6}{4a^8X^4} + \frac{28b^6}{3a^9X^3} + \frac{42b^6}{a^{10}X^2} + \frac{210b^6}{a^{11}X} - \frac{1}{6a^6x^6} + \frac{6b}{5a^7x^5} - \frac{21b^2}{4a^8x^4}$$
$$+ \frac{56b^3}{3a^9x^3} - \frac{63b^4}{a^{10}x^2} + \frac{252b^5}{a^{11}x} - \frac{462b^6}{a^{12}}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^7X^7} = \frac{b^6}{6a^7X^6} + \frac{7b^6}{5a^8X^5} + \frac{7b^6}{a^9X^4} + \frac{28b^6}{a^{10}X^3} + \frac{105b^6}{a^{11}X^2} + \frac{462b^6}{a^{12}X} - \frac{1}{6a^7x^6} + \frac{7b}{5a^8x^5}$$
$$- \frac{7b^2}{a^9x^4} + \frac{28b^3}{a^{10}x^3} - \frac{105b^4}{a^{11}x^2} + \frac{462b^5}{a^{12}x} - \frac{924b^6}{a^{13}}\log\frac{X}{x}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^7X^8} = \frac{b^6}{7a^7X^7} + \frac{7b^6}{6a^8X^6} + \frac{28b^6}{5a^9X^5} + \frac{21b^6}{a^{10}X^4} + \frac{70b^6}{a^{11}X^3} + \frac{231b^6}{a^{12}X^2} + \frac{924b^6}{a^{13}X} - \frac{1}{6a^8x^6}$$
$$+ \frac{8b}{5a^9x^5} - \frac{9b^2}{a^{10}x^4} + \frac{40b^3}{a^{11}x^3} - \frac{165b^4}{a^{12}x^2} + \frac{792b^5}{a^{13}x} - \frac{1716b^6}{a^{14}}\log\frac{X}{x}.$$

Tafel XIV.

$$X = a + bx^2.$$

Reductionsformeln:
$$\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{2\mu a} \cdot \frac{x}{X^\mu} + \frac{2\mu-1}{2\mu a} \int \frac{\partial x}{X^\mu} .$$

$$\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x}{2\mu a} \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{(\mu-\frac{1}{2})_\nu}{(\mu-1)_\nu a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{(\mu-\frac{1}{2})_\mu}{a^\mu} \int \frac{\partial x}{X} .$$

$$\int \frac{\partial x}{X} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{Arc.Tang} x \sqrt{\frac{b}{a}},$$ wenn a und b positiv sind.

$$\int \frac{\partial x}{X} = \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \log \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{-b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{-b}},$$ wenn a positiv, b negativ ist*).

$$\int \frac{\partial x}{X^2} = \frac{x}{2aX} + \frac{1}{2a} \int \frac{\partial x}{X} .$$

$$\int \frac{\partial x}{X^3} = \frac{x}{4aX^2} + \frac{3x}{8a^2X} + \frac{3}{8a^2} \int \frac{\partial x}{X} .$$

$$\int \frac{\partial x}{X^4} = \frac{x}{6aX^3} + \frac{5x}{24a^2X^2} + \frac{5x}{16a^3X} + \frac{5}{16a^3} \int \frac{\partial x}{X} .$$

$$\int \frac{\partial x}{X^5} = \frac{x}{8aX^4} + \frac{7x}{48a^2X^3} + \frac{35x}{192a^3X^2} + \frac{35x}{128a^4X} + \frac{35}{128a^4} \int \frac{\partial x}{X} .$$

$$\int \frac{\partial x}{X^6} = \frac{x}{10aX^5} + \frac{9x}{80a^2X^4} + \frac{21x}{160a^3X^3} + \frac{21x}{128a^4X^2} + \frac{63x}{256a^5X} + \frac{63}{256a^5} \int \frac{\partial x}{X} .$$

$$\int \frac{\partial x}{X^7} = \frac{x}{12aX^6} + \frac{11x}{120a^2X^5} + \frac{33x}{320a^3X^4} + \frac{77x}{640a^4X^3} + \frac{77x}{512a^5X^2} + \frac{231x}{1024a^6X} + \frac{231}{1024a^6} \int \frac{\partial x}{X} .$$

$$\int \frac{\partial x}{X^8} = \frac{x}{14aX^7} + \frac{13x}{168a^2X^6} + \frac{143x}{1680a^3X^5} + \frac{429x}{4480a^4X^4} + \frac{143x}{1280a^5X^3} + \frac{143x}{1024a^6X^2} + \frac{429x}{2048a^7X} + \frac{429}{2048a^7} \int \frac{\partial x}{X} .$$

---

*) Diese Formel kann auch so geschrieben werden: $\int \frac{\partial x}{X} = \frac{1}{\sqrt{-ab}} \operatorname{Arc.Tang} x \sqrt{\frac{-b}{a}}$,

oder auch: $\int \frac{\partial x}{X} = \frac{1}{\sqrt{-ab}} \operatorname{Arc.Cotg} x \sqrt{\frac{-b}{a}}$.

Tafel XV.

$$X = a + bx^2.$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int \frac{\partial x}{X^{\mu}} - \frac{a}{b}\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}} .$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x}{2\mu b X^{\mu}} + \frac{1}{2\mu b}\int \frac{\partial x}{X^{\mu}} .$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{\partial x}{X} .$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^2} = -\frac{x}{2bX} + \frac{1}{2b}\int \frac{\partial x}{X} .$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^3} = \frac{x}{b}\left[-\frac{1}{4X^2} + \frac{1}{8aX}\right] + \frac{1}{8ab}\int \frac{\partial x}{X} .$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^4} = \frac{x}{b}\left[-\frac{1}{6X^3} + \frac{1}{24aX^2} + \frac{1}{16a^2X}\right] + \frac{1}{16a^2b}\int \frac{\partial x}{X} .$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^5} = \frac{x}{b}\left[-\frac{1}{8X^4} + \frac{1}{48aX^3} + \frac{5}{192a^2X^2} + \frac{5}{128a^3X}\right] + \frac{5}{128a^3b}\int \frac{\partial x}{X} .$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^6} = \frac{x}{b}\left[-\frac{1}{10X^5} + \frac{1}{80aX^4} + \frac{7}{480a^2X^3} + \frac{7}{384a^3X^2} + \frac{7}{256a^4X}\right]$$
$$+ \frac{7}{256a^4b}\int \frac{\partial x}{X} .$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^7} = \frac{x}{b}\left[-\frac{1}{12X^6} + \frac{1}{120aX^5} + \frac{3}{320a^2X^4} + \frac{7}{640a^3X^3} + \frac{7}{512a^4X^2}\right.$$
$$\left. + \frac{21}{1024a^5X}\right] + \frac{21}{1024a^5b}\int \frac{\partial x}{X} .$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^8} = \frac{x}{b}\left[-\frac{1}{14X^7} + \frac{1}{168aX^6} + \frac{11}{1680a^2X^5} + \frac{33}{4480a^3X^4} + \frac{11}{1280a^4X^3}\right.$$
$$\left. + \frac{11}{1024a^5X^2} + \frac{33}{2048a^6X}\right] + \frac{33}{2048a^6b}\int \frac{\partial x}{X} .$$

Tafel XVI.

$$X = a + bx^2.$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int\frac{x^2\partial x}{X^{\mu}} - \frac{a}{b}\int\frac{x^2\partial x}{X^{\mu+1}}\,.$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x}{b^2}\left[\frac{a}{2\mu X^{\mu}} - \frac{2\mu+1}{2^2\mu(\mu-1)X^{\mu-1}}\right] + \frac{3}{2^2\mu(\mu-1)b^2}\int\frac{\partial x}{X^{\mu-1}}\,.$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X} = \frac{x^3}{3b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X^2} = \frac{x}{b^2} + \frac{ax}{2b^2X} - \frac{3a}{2b^2}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X^3} = \frac{x}{b^2}\left[\frac{a}{4X^2} - \frac{5}{8X}\right] + \frac{3}{8b^2}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X^4} = \frac{x}{b^2}\left[\frac{a}{6X^3} - \frac{7}{24X^2} + \frac{1}{16aX}\right] + \frac{1}{16ab^2}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X^5} = \frac{x}{b^2}\left[\frac{a}{8X^4} - \frac{3}{16X^3} + \frac{1}{64aX^2} + \frac{3}{128a^2X}\right] + \frac{3}{128a^2b^2}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X^6} = \frac{x}{b^2}\left[\frac{a}{10X^5} - \frac{11}{80X^4} + \frac{1}{160aX^3} + \frac{1}{128a^2X^2} + \frac{3}{256a^3X}\right]$$
$$+ \frac{3}{256a^3b^2}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X^7} = \frac{x}{b^2}\left[\frac{a}{12X^6} - \frac{13}{120X^5} + \frac{1}{320aX^4} + \frac{7}{1920a^2X^3} + \frac{7}{1536a^3X^2}\right.$$
$$\left. + \frac{7}{1024a^4X}\right] + \frac{7}{1024a^4b^2}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X^8} = \frac{x}{b^2}\left[\frac{a}{14X^7} - \frac{5}{56X^6} + \frac{1}{560aX^5} + \frac{9}{4480a^2X^4} + \frac{3}{1280a^3X^3}\right.$$
$$\left. + \frac{3}{1024a^4X^2} + \frac{9}{2048a^5X}\right] + \frac{9}{2048a^5b^2}\int\frac{\partial x}{X}\,.$$

Tafel XVII.

$$X = a + bx^2.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int\frac{x^4\partial x}{X^{\mu}} - \frac{a}{b}\int\frac{x^4\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x}{b^3}\left[-\frac{a^2}{2\mu X^{\mu}} + \frac{(4\mu+1)a}{2^2\mu(\mu-1)X^{\mu-1}} - \frac{4\mu^2-2\mu+3}{2^3\mu(\mu-1)(\mu-2)X^{\mu-2}}\right] + \frac{15}{2^3\mu(\mu-1)(\mu-2)b^3}\int\frac{\partial x}{X^{\mu-2}}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X} = \frac{x^5}{5b} - \frac{ax^3}{3b^2} + \frac{a^2x}{b^3} - \frac{a^3}{b^3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^2} = \frac{x}{b^3}\left[\frac{bx^2}{3} - 2a - \frac{a^2}{2X}\right] + \frac{5a^2}{2b^3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^3} = \frac{x}{b^3}\left[-\frac{a^2}{4X^2} + \frac{9a}{8X} + 1\right] - \frac{15a}{8b^3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^4} = \frac{x}{b^3}\left[-\frac{a^2}{6X^3} + \frac{13a}{24X^2} - \frac{11}{16X}\right] + \frac{5}{16b^3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^5} = \frac{x}{b^3}\left[-\frac{a^2}{8X^4} + \frac{17a}{48X^3} - \frac{59}{192X^2} + \frac{5}{128aX}\right] + \frac{5}{128ab^3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^6} = \frac{x}{b^3}\left[-\frac{a^2}{10X^5} + \frac{21a}{80X^4} - \frac{31}{160X^3} + \frac{1}{128aX^2} + \frac{3}{256a^2X}\right] + \frac{3}{256a^2b^3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^7} = \frac{x}{b^3}\left[-\frac{a^2}{12X^6} + \frac{5a}{24X^5} - \frac{9}{64X^4} + \frac{1}{384aX^3} + \frac{5}{1536a^2X^2} + \frac{5}{1024a^3X}\right] + \frac{5}{1024a^3b^3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^8} = \frac{x}{b^3}\left[-\frac{a^2}{14X^7} + \frac{29a}{168X^6} - \frac{37}{336X^5} + \frac{1}{896aX^4} + \frac{1}{768a^2X^3} + \frac{5}{3072a^3X^2} + \frac{5}{2048a^4X}\right] + \frac{5}{2048a^4b^3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XVIII.

$$X = a + bx^2.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int \frac{x^6 \partial x}{X^{\mu}} - \frac{a}{b}\int \frac{x^6 \partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x}{b^4}\left[\frac{a^3}{2\mu X^{\mu}} - \frac{(6\mu+1)a^2}{2^2\mu(\mu-1)X^{\mu-1}} + \frac{(12\mu^2-8\mu+3)a}{2^3\mu(\mu-1)(\mu-2)X^{\mu-2}} - \frac{8\mu^3-20\mu^2+18\mu+15}{2^4\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)X^{\mu-3}}\right] + \frac{105}{2^4\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)b^4}\int \frac{\partial x}{X^{\mu-3}}.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X} = \frac{x^7}{7b} - \frac{ax^5}{5b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^3x}{b^4} + \frac{a^4}{b^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X^2} = \frac{x^5}{5b^2} - \frac{2ax^3}{3b^3} + \frac{3a^2x}{b^4} + \frac{a^3x}{2b^4X} - \frac{7a^3}{2b^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X^3} = \frac{x^3}{3b^3} - \frac{3ax}{b^4} - \frac{13a^2x}{8b^4X} + \frac{a^3x}{4b^4X^2} + \frac{35a^2}{8b^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X^4} = \frac{x}{b^4} + \frac{x}{b^4}\left[\frac{a^3}{6X^3} - \frac{19a^2}{24X^2} + \frac{29a}{16X}\right] - \frac{35a}{16b^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X^5} = \frac{x}{b^4}\left[\frac{a^3}{8X^4} - \frac{25a^2}{48X^3} + \frac{163a}{192X^2} - \frac{93}{128X}\right] + \frac{35}{128b^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X^6} = \frac{x}{b^4}\left[\frac{a^3}{10X^5} - \frac{31a^2}{80X^4} + \frac{263a}{480X^3} - \frac{121}{384X^2} + \frac{7}{256aX}\right] + \frac{7}{256ab^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X^7} = \frac{x}{b^4}\left[\frac{a^3}{12X^6} - \frac{37a^2}{120X^5} + \frac{129a}{320X^4} - \frac{377}{1920X^3} + \frac{7}{1536aX^2} + \frac{7}{1024a^2X}\right] + \frac{7}{1024a^2b^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{X^8} = \frac{x}{b^4}\left[\frac{a^3}{14X^7} - \frac{43a^2}{168X^6} + \frac{107a}{336X^5} - \frac{127}{896X^4} + \frac{1}{768aX^3} + \frac{5}{3072a^2X^2} + \frac{5}{2048a^3X}\right] + \frac{5}{2048a^3b^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XIX.

$$X = a + bx^2.$$

$$\int \frac{x^{10}\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int \frac{x^8\partial x}{X^{\mu}} - \frac{a}{b}\int \frac{x^8\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^{10}\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x}{b^5}\Big[-\frac{a^4}{2\mu X^{\mu}} + \frac{(8\mu+1)a^3}{2^2\mu(\mu-1)X^{\mu-1}} - \frac{(24\mu^2-18\mu+3)a^2}{2^3\mu(\mu-1)(\mu-2)X^{\mu-2}}$$
$$+ \frac{(32\mu^3-84\mu^2+64\mu+15)a}{2^4\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)X^{\mu-3}} - \frac{16\mu^4-88\mu^3+164\mu^2-62\mu+105}{2^5\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)X^{\mu-4}}\Big]$$
$$+ \frac{945}{2^5\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)b^5}\int \frac{\partial x}{X^{\mu-4}}.$$

$$\int \frac{x^{10}\partial x}{X} = \frac{x^9}{9b} - \frac{ax^7}{7b^2} + \frac{a^2x^5}{5b^3} - \frac{a^3x^3}{3b^4} + \frac{a^4x}{b^5} - \frac{a^5}{b^5}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^{10}\partial x}{X^2} = \frac{x^7}{7b^2} - \frac{2ax^5}{5b^3} + \frac{a^2x^3}{b^4} - \frac{4a^3x}{b^5} - \frac{a^4x}{2b^5X} + \frac{9a^4}{2b^5}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^{10}\partial x}{X^3} = \frac{x^5}{5b^3} - \frac{ax^3}{b^4} + \frac{6a^2x}{b^5} - \frac{x}{b^5}\Big[\frac{a^4}{4X^2} - \frac{17a^3}{8X}\Big] - \frac{63a^3}{8b^5}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^{10}\partial x}{X^4} = \frac{x^3}{3b^4} - \frac{4ax}{b^5} - \frac{x}{b^5}\Big[\frac{a^4}{6X^3} - \frac{25a^3}{24X^2} + \frac{55a^2}{16X}\Big] + \frac{105a^2}{16b^5}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^{10}\partial x}{X^5} = \frac{x}{b^5} - \frac{x}{b^5}\Big[\frac{a^4}{8X^4} - \frac{11a^3}{16X^3} + \frac{105a^2}{64X^2} - \frac{325a}{128X}\Big] - \frac{315a}{128b^5}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^{10}\partial x}{X^6} = \frac{x}{b^5}\Big[-\frac{a^4}{10X^5} + \frac{41a^3}{80X^4} - \frac{171a^2}{160X^3} + \frac{149a}{128X^2} - \frac{193}{256X}\Big] + \frac{63}{256b^5}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^{10}\partial x}{X^7} = \frac{x}{b^5}\Big[-\frac{a^4}{12X^6} + \frac{49a^3}{120X^5} - \frac{253a^2}{320X^4} + \frac{1429a}{1920X^3} - \frac{491}{1536X^2} + \frac{21}{1024aX}\Big]$$
$$+ \frac{21}{1024ab^5}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^{10}\partial x}{X^8} = \frac{x}{b^5}\Big[-\frac{a^4}{14X^7} + \frac{19a^3}{56X^6} - \frac{351a^2}{560X^5} + \frac{2441a}{4480X^4} - \frac{253}{1280X^3} + \frac{3}{1024aX^2}$$
$$+ \frac{9}{2048a^2X}\Big] + \frac{9}{2048a^2b^5}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XX.

$$X = a + bx^2.$$

Allgemeine Formeln zu Tafel XIV bis XIX.

Reductionsformeln:

$$\int\frac{x^{2m}\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int\frac{x^{2m-2}\partial x}{X^{\mu}} - \frac{a}{b}\int\frac{x^{2m-2}\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x^{2m-1}}{2\mu b X^{\mu}} + \frac{2m-1}{2b\mu}\int\frac{x^{2m-2}\partial x}{X^{\mu}}.$$

$$\int\frac{x^{2m}\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b^m}\int\frac{(X-a)^m\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b^m}\sum_{\nu=0}^{\nu=m} m_\nu(-a)^\nu\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1-m+\nu}}.$$

$$\int\frac{x^{2m}\partial x}{X^{\mu+1}} = (-1)^m\frac{x}{b^m}\sum_{\nu=0}^{\nu=m-1}\frac{\alpha_\nu a^{m-\nu-1}}{X^{\mu-\nu}} + \frac{\beta}{b^m}\int\frac{\partial x}{X^{\mu-m+1}}.$$

Die Coëfficienten $\alpha_0\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_{m-1}\ \beta$ ergeben sich aus folgenden Gleichungen:

$2\mu\alpha_0 = 1$; $(2\mu-2)\alpha_1-(2\mu-1)\alpha_0 = -m_1$; $(2\mu-4)\alpha_2-(2\mu-3)\alpha_1 = m_2$;

$(2\mu-2\nu)\alpha_\nu-(2\mu-2\nu+1)\alpha_{\nu-1} = (-1)^\nu m_\nu$, für $\nu = 1, 2, 3, \ldots\ldots, m-1$;

$$\beta = \frac{1.\ 3.\ 5.\ 7.\ \cdots\cdots\ 2m-1}{2^m\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots\cdots(\mu-m+1)} = \frac{(m-\frac{1}{2})_m}{\mu_m}.$$

Diese Formel gilt nur, wenn $\mu+1>m$. Die folgende gilt in allen Fällen, wenn m und μ positive ganze Zahlen, Null nicht ausgeschlossen, bedeuten,

$$\int\frac{x^{2m}\partial x}{X^{\mu+1}} = \sum_{\nu=0}^{\nu=m-\mu-1}\frac{(-1)^\nu(\mu+\nu)_\nu a^\nu x^{2m-2\mu-2\nu-1}}{(2m-2\mu-2\nu-1)b^{\mu+\nu+1}} + \frac{(-1)^m x}{b^m}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{\alpha_\nu a^{m-\nu-1}}{X^{\mu-\nu}}$$
$$+\frac{(-1)^m\gamma a^{m-\mu}}{b^m}\int\frac{\partial x}{X};$$

wo $2\mu\alpha_0 = 1$ und allgemein $(2\mu-2\nu)\alpha_\nu-(2\mu-2\nu+1)\alpha_{\nu-1} = (-1)^\nu m_\nu$, für $\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots \mu-1$; oder auch

$$(2\mu-2\nu)\alpha_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu}\frac{(-1)^\lambda(\mu-\lambda-\frac{1}{2})_{\nu-\lambda}m\lambda}{(\mu-\lambda)_{\nu-\lambda}};\ \text{und}\ \gamma = \alpha_{\mu-1}+(-1)^\mu m_\mu.$$

Anmerkung. Integrale von der Form $\int\frac{x^{2m+1}\partial x}{(a+bx^2)^\mu}$ verwandeln sich durch Einsetzung von z für x^2 in $\frac{1}{2}\int\frac{z^m\partial z}{(a+bz)^\mu}$, und finden sich in dieser Form auf Tafel I bis VI.

Tafel XXI.

$$X = a + bx^2.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x^2X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^{\mu+1}} = -\frac{1}{a^{\mu+1}x} - \frac{bx}{a^2}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} - \frac{b\gamma}{a^{\mu+1}}\int\frac{\partial x}{X}.$$

Die Coëfficienten $\beta_0, \beta_1 \ldots \beta_{\mu-1}$ und γ ergeben sich aus den Gleichungen:

$\beta_0 = \frac{1}{2\mu}$; $(2\mu-2)\beta_1-(2\mu-1)\beta_0 = 1$; allgem. $(2\mu-2\nu)\beta_\nu-(2\mu-2\nu+1)\beta_{\nu-1}=1$, für $\nu = 1, 2, 3, \ldots \mu-1$ und $\gamma = \beta_{\mu-1}+1$.

$$\int\frac{\partial x}{x^2X} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^2} = -\frac{1}{a^2x} - \frac{bx}{2a^2X} - \frac{3b}{2a^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^3} = -\frac{1}{a^3x} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{4X^2} + \frac{7}{8aX}\right] - \frac{15b}{8a^3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^4} = -\frac{1}{a^4x} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{6X^3} + \frac{11}{24aX^2} + \frac{19}{16a^2X}\right] - \frac{35b}{16a^4}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^5} = -\frac{1}{a^5x} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{8X^4} + \frac{5}{16aX^3} + \frac{41}{64a^2X^2} + \frac{187}{128a^3X}\right] - \frac{315b}{128a^5}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^6} = -\frac{1}{a^6x} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{10X^5} + \frac{19}{80aX^4} + \frac{71}{160a^2X^3} + \frac{103}{128a^3X^2} + \frac{437}{256a^4X}\right] - \frac{693b}{256a^6}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^7} = -\frac{1}{a^7x} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{12X^6} + \frac{23}{120aX^5} + \frac{109}{320a^2X^4} + \frac{361}{640a^3X^3} + \frac{489}{512a^4X^2} + \frac{1979}{1024a^5X}\right] - \frac{3003b}{1024a^7}\int\frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XXII.

$$X = a + bx^2.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^4 X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{x^2 X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^{\mu+1}} = -\frac{1}{3a^{\mu+1}x^3} + \frac{(\mu+1)b}{a^{\mu+2}x} + \frac{b^2 x}{a^3}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{b^2\gamma}{a^{\mu+2}}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Die Coëfficienten ergeben sich aus den Gleichungen:

$2\mu\beta_0 = 1$ und allgemein $(2\mu - 2\nu)\beta_\nu - (2\mu - 2\nu + 1)\beta_{\nu-1} = \nu + 1$, für $\nu = 1, 2, 3, \cdots \mu - 1$; $\gamma = \beta_{\mu-1} + \mu + 1$.

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X} = -\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{a^2 x} + \frac{b^2}{a^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^2} = -\frac{1}{3a^2x^3} + \frac{2b}{a^3 x} + \frac{b^2 x}{2a^3 X} + \frac{5b^2}{2a^3}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^3} = -\frac{1}{3a^3x^3} + \frac{3b}{a^4 x} + \frac{b^2 x}{a^3}\left[\frac{1}{4X^2} + \frac{11}{8aX}\right] + \frac{35b^2}{8a^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^4} = -\frac{1}{3a^4x^3} + \frac{4b}{a^5 x} + \frac{b^2 x}{a^3}\left[\frac{1}{6X^3} + \frac{17}{24aX^2} + \frac{41}{16a^2X}\right] + \frac{105b^2}{16a^5}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^5} = -\frac{1}{3a^5x^3} + \frac{5b}{a^6 x} + \frac{b^2 x}{a^3}\left[\frac{1}{8X^4} + \frac{23}{48aX^3} + \frac{259}{192a^2X^2} + \frac{515}{128a^3X}\right] + \frac{1155b^2}{128a^6}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^6} = -\frac{1}{3a^6x^3} + \frac{6b}{a^7 x} + \frac{b^2 x}{a^3}\left[\frac{1}{10X^5} + \frac{29}{80aX^4} + \frac{443}{480a^2X^3} + \frac{827}{384a^3X^2} + \frac{1467}{256a^4X}\right] + \frac{3003b^2}{256a^7}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^7} = -\frac{1}{3a^7x^3} + \frac{7b}{a^8 x} + \frac{b^2 x}{a^3}\left[\frac{1}{12X^6} + \frac{7}{24aX^5} + \frac{45}{64a^2X^4} + \frac{571}{384a^3X^3} + \frac{4775}{1536a^4X^2} + \frac{7847}{1024a^5X}\right] + \frac{15015b^2}{1024a^8}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XXIII.

$$X = a + bx^2.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^6X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x^6X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{x^4X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^6X^{\mu+1}} = -\frac{1}{5a^{\mu+1}x^5} + \frac{(\mu+1)b}{3a^{\mu+2}x^3} - \frac{(\mu+2)_2b^2}{a^{\mu+3}x} - \frac{b^3x}{a^4}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} - \frac{b^3\gamma}{a^{\mu+3}}\int\frac{\partial x}{X}.$$

Die Coëfficienten ergeben sich aus folgenden Gleichungen:

$2\mu\beta_0 = 1$, und allgemein $(2\mu-2\nu)\beta_\nu - (2\mu-2\nu+1)\beta_{\nu-1} = (\nu+2)_2$, für $\nu = 1, 2, 3, \cdots \mu-1$; $\gamma = \beta_{\mu-1} + (\mu+2)_2$.

$$\int\frac{\partial x}{x^6X} = -\frac{1}{5ax^5} + \frac{b}{3a^2x^3} - \frac{b^2}{a^3x} - \frac{b^3}{a^3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{dx}{x^6X^2} = -\frac{1}{5a^2x^5} + \frac{2b}{3a^3x^3} - \frac{3b^2}{a^4x} - \frac{b^3x}{2a^4X} - \frac{7b^3}{2a^4}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^6X^3} = -\frac{1}{5a^3x^5} + \frac{b}{a^4x^3} - \frac{6b^2}{a^5x} - \frac{b^3x}{a^4}\left[\frac{1}{4X^2} + \frac{15}{8aX}\right] - \frac{63b^3}{8a^5}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^6X^4} = -\frac{1}{5a^4x^5} + \frac{4b}{3a^5x^3} - \frac{10b^2}{a^6x} - \frac{b^3x}{a^4}\left[\frac{1}{6X^3} + \frac{23}{24aX^2} + \frac{71}{16a^2X}\right] - \frac{231b^3}{16a^6}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^6X^5} = -\frac{1}{5a^5x^5} + \frac{5b}{3a^6x^3} - \frac{15b^2}{a^7x} - \frac{b^3x}{a^4}\left[\frac{1}{8X^4} + \frac{31}{48aX^3} + \frac{443}{192a^2X^2} + \frac{1083}{128a^3X}\right] - \frac{3003b^3}{128a^7}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^6X^6} = -\frac{1}{5a^6x^5} + \frac{2b}{a^7x^3} - \frac{21b^2}{a^8x} - \frac{b^3x}{a^4}\left[\frac{1}{10X^5} + \frac{39}{80aX^4} + \frac{753}{480a^2X^3} + \frac{571}{128a^3X^2} + \frac{3633}{256a^4X}\right] - \frac{9009b^3}{256a^8}\int\frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XXIV.

$$X = a + bx^2.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^8 X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^8 X^\mu} - \frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{x^6 X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^8 X^{\mu+1}} = -\frac{1}{7a^{\mu+1}x^7} + \frac{(\mu+1)b}{5a^{\mu+2}x^5} - \frac{(\mu+2)_2 b^2}{3a^{\mu+3}x^3} + \frac{(\mu+3)_3 b^3}{a^{\mu+4}x}$$
$$+ \frac{b^4 x}{a^5}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{\gamma b^4}{a^{\mu+4}}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Die Coëfficienten finden sich aus folgenden Gleichungen:

$2\mu\beta_0 = 1$; und allgemein $(2\mu - 2\nu)\beta_\nu - (2\mu - 2\nu + 1)\beta_{\nu-1} = (\nu+3)_3$, für $\nu = 1, 2, 3, \cdots \mu - 1$; $\gamma = \beta_{\mu-1} + (\mu+3)_3$.

$$\int \frac{\partial x}{x^8 X} = -\frac{1}{7ax^7} + \frac{b}{5a^2x^5} - \frac{b^2}{3a^3x^3} + \frac{b^3}{a^4x} + \frac{b^4}{a^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^8 X^2} = -\frac{1}{7a^2x^7} + \frac{2b}{5a^3x^5} - \frac{b^2}{a^4x^3} + \frac{4b^3}{a^5x} + \frac{b^4x}{2a^5X} + \frac{9b^4}{2a^6}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^8 X^3} = -\frac{1}{7a^3x^7} + \frac{3b}{5a^4x^5} - \frac{2b^2}{a^5x^3} + \frac{10b^3}{a^6x} + \frac{b^4x}{a^5}\left[\frac{1}{4X^2} + \frac{19}{8aX}\right] + \frac{99b^4}{8a^6}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^8 X^4} = -\frac{1}{7a^4x^7} + \frac{4b}{5a^5x^5} - \frac{10b^2}{3a^6x^3} + \frac{20b^3}{a^7x} + \frac{b^4x}{a^5}\left[\frac{1}{6X^3} + \frac{29}{24aX^2} + \frac{109}{16a^2X}\right]$$
$$+ \frac{429b^4}{16a^7}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^8 X^5} = -\frac{1}{7a^5x^7} + \frac{b}{5a^6x^5} - \frac{5b^2}{a^7x^3} + \frac{35b^3}{a^8x} + \frac{b^4x}{a^5}\left[\frac{1}{8X^4} + \frac{13}{16aX^3} + \frac{225}{64a^2X^2}\right.$$
$$\left. + \frac{1955}{128a^3X}\right] + \frac{6435b^4}{128a^8}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^8 X^6} = -\frac{1}{7a^6x^7} + \frac{6b}{5a^7x^5} - \frac{7b^2}{a^8x^3} + \frac{56b^3}{a^9x} + \frac{b^4x}{a^5}\left[\frac{1}{10X^5} + \frac{49}{80aX^4} + \frac{1143}{480a^2X^3}\right.$$
$$\left. + \frac{1021}{128a^3X^2} + \frac{7543}{256a^4X}\right] + \frac{21879b^4}{256a^9}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^8 X^7} = -\frac{1}{7a^7x^7} + \frac{7b}{5a^8x^5} - \frac{28b^2}{3a^9x^3} + \frac{84b^3}{a^{10}x} + \frac{b^4x}{a^5}\left[\frac{1}{12X^6} + \frac{59}{120aX^5} + \frac{577}{320a^2X^4}\right.$$
$$\left. + \frac{10439}{1920a^3X^3} + \frac{23879}{1536a^4X^2} + \frac{52551}{1024a^5X}\right] + \frac{138567b^4}{1024a^{10}}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XXV.

$$X = a + bx^2.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^{10}X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^{10}X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{x^{8}X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^{10}X^{\mu+1}} = -\frac{1}{9a^{\mu+1}x^9} + \frac{(\mu+1)b}{7a^{\mu+2}x^7} - \frac{(\mu+2)_2 b^2}{5a^{\mu+3}x^5} + \frac{(\mu+3)_3 b^3}{3a^{\mu+4}x^3} - \frac{(\mu+4)_4 b^4}{a^{\mu+5}x}$$
$$-\frac{b^5x}{a^6}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} - \frac{\gamma b^5}{a^{\mu+5}}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Die Coëfficienten ergeben sich aus folgenden Gleichungen:

$\beta_0 = \frac{1}{2\mu}$; allgemein $(2\mu - 2\nu)\beta_\nu - (2\mu - 2\nu + 1)\beta_{\nu-1} = (\nu+4)_4$, für

$\nu = 1, 2, 3, \cdots \mu - 1$; $\gamma = \beta_{\mu-1} + (\mu+4)_4$.

$$\int \frac{\partial x}{x^{10}X} = -\frac{1}{9ax^9} + \frac{b}{7a^2x^7} - \frac{b^2}{5a^3x^5} + \frac{b^3}{3a^4x^3} - \frac{b^4}{a^5x} - \frac{b^5}{a^5}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^{10}X^2} = -\frac{1}{9a^2x^9} + \frac{2b}{7a^3x^7} - \frac{3b^2}{5a^4x^5} + \frac{4b^3}{3a^5x^3} - \frac{5b^4}{a^6x} - \frac{b^5x}{2a^6X} - \frac{11b^5}{2a^6}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^{10}X^3} = -\frac{1}{9a^3x^9} + \frac{3b}{7a^4x^7} - \frac{6b^2}{5a^5x^5} + \frac{10b^3}{3a^6x^3} - \frac{15b^4}{a^7x} - \frac{b^5x}{a^6}\left[\frac{1}{4X^2} + \frac{23}{8aX}\right]$$
$$-\frac{143b^5}{8a^7}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^{10}X^4} = -\frac{1}{9a^4x^9} + \frac{4b}{7a^5x^7} - \frac{2b^2}{a^6x^5} + \frac{20b^3}{3a^7x^3} - \frac{35b^4}{a^8x} - \frac{b^5x}{a^6}\left[\frac{1}{6X^3} + \frac{35}{24aX^2}\right.$$
$$\left.+\frac{155}{16a^2X}\right] - \frac{715b^5}{16a^8}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^{10}X^5} = -\frac{1}{9a^5x^9} + \frac{5b}{7a^6x^7} - \frac{3b^2}{a^7x^5} + \frac{35b^3}{3a^8x^3} - \frac{70b^4}{a^9x} - \frac{b^5x}{a^6}\left[\frac{1}{8X^4} + \frac{47}{48aX^3}\right.$$
$$\left.+\frac{955}{192a^2X^2} + \frac{3195}{128a^3X}\right] - \frac{12155b^5}{128a^9}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^{10}X^6} = -\frac{1}{9a^6x^9} + \frac{6b}{7a^7x^7} - \frac{21b^2}{5a^8x^5} + \frac{56b^3}{3a^9x^3} - \frac{126b^4}{a^{10}x} - \frac{b^5x}{a^6}\left[\frac{1}{10X^5} + \frac{59}{80aX^4}\right.$$
$$\left.+\frac{1613}{480a^2X^3} + \frac{4973}{384a^3X^2} + \frac{13933}{256a^4X}\right] - \frac{46189b^5}{256a^{10}}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XXVI.

$$X = a + bx^2.$$

Allgemeine Formeln zu Tafel XXI bis XXV.

Reductionsformel: $$\int \frac{\partial x}{x^{2m} X^{\mu+1}} = \frac{1}{a} \int \frac{\partial x}{x^{2m} X^{\mu}} - \frac{b}{a} \int \frac{\partial x}{x^{2m-2} X^{\mu+1}} .$$

$$\int \frac{\partial x}{x^{2m} X^{\mu+1}} = \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} \frac{(-1)^{\nu-1} (\mu+\nu)_\nu b^\nu}{(2m-2\nu-1) a^{\mu+\nu+1} x^{2m-2\nu-1}} + \frac{(-1)^m b^m x}{a^{m+1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}}$$

$$+ \frac{(-1)^m b^m \gamma}{a^{\mu+m}} \int \frac{\partial x}{X} .$$

$$\beta_0 = \frac{1}{2\mu} \; ; \quad (2\mu - 2\nu)\beta_\nu - (2\mu - 2\nu + 1)\beta_{\nu-1} = (m + \nu - 1)_\nu ,$$

für $\nu = 1, 2, 3, \cdots \mu - 1 \quad ; \quad \gamma = \beta_{\mu-1} + (m + \mu - 1)_\mu .$

Unabhängig von den vorhergehenden Coëfficienten wird β_ν ausgedrückt durch die Formel:

$$(2\mu - 2\nu)\beta_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu} \frac{(m + \lambda - 1)_\lambda (\mu - \lambda - \frac{1}{2})_{\nu-\lambda}}{(\mu - \lambda)_{\nu-\lambda}} .$$

Anmerkung. Die Formel $\int \frac{\partial x}{x^{2m+1} X^{\mu+1}}$ verwandelt sich für $x^2 = z$ in

$$\frac{1}{2} \int \frac{\partial z}{z^{m+1} (a + bz)^{\mu}}$$

und findet sich in dieser Form auf Tafel VII bis XIII.

Tafel XXVII.

$$X = a + bx^3.$$

a und b positiv oder negativ, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = k$.

$$\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x}{3\mu a X^{\mu}} + \frac{3\mu - 1}{3\mu a} \int \frac{\partial x}{X^{\mu}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x}{3a} \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{(\mu - \frac{1}{3})_{\nu}}{\mu_{\nu}(\mu - \nu) a^{\nu} X^{\mu-\nu}} + \frac{(\mu - \frac{1}{3})_{\mu}}{a^{\mu}} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X} = \frac{k}{3a}\left[\frac{1}{2} \log \frac{(x+k)^2}{x^2 - 2kx + k^2} + \sqrt{3} \cdot \text{Arc.Tang} \frac{x\sqrt{3}}{2k - x}\right].$$

$$\int \frac{\partial x}{X^2} = \frac{x}{3aX} + \frac{2}{3a} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^3} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{6X^2} + \frac{5}{18aX}\right] + \frac{5}{9a^2} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^4} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{9X^3} + \frac{4}{27aX^2} + \frac{20}{81a^2X}\right] + \frac{40}{81a^3} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^5} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{12X^4} + \frac{11}{108aX^3} + \frac{11}{81a^2X^2} + \frac{55}{243a^3X}\right] + \frac{110}{243a^4} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^6} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{15X^5} + \frac{7}{90aX^4} + \frac{77}{810a^2X^3} + \frac{154}{1215a^3X^2} + \frac{154}{729a^4X}\right] + \frac{308}{729a^5} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^7} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{18X^6} + \frac{17}{270aX^5} + \frac{119}{1620a^2X^4} + \frac{1309}{14580a^3X^3} + \frac{1309}{10935a^4X^2} + \frac{1309}{6561a^5X}\right] + \frac{2618}{6561a^6} \int \frac{\partial x}{X}.$$

Anmerkung. Die folgenden Tafeln für $\int \frac{x^{m-1}\partial x}{X^{\mu+1}}$ sind nach den Werthen von m, mit Ausschluss der durch 3 theilbaren m, abgetheilt und geordnet, nämlich: m = 1, 4, 7; m = 2, 5, 8; m = −1, −4; m = −2, −5.

Tafel XXVIII.

$$X = a + bx^3.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int \frac{\partial x}{X^{\mu}} - \frac{a}{b}\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x}{3b\mu X^{\mu}} + \frac{1}{3\mu b}\int \frac{\partial x}{X^{\mu}}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^2} = -\frac{x}{3bX} + \frac{1}{3b}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^3} = -\frac{x}{b}\left[\frac{1}{6X^2} - \frac{1}{18aX}\right] + \frac{1}{9ab}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^4} = -\frac{x}{b}\left[\frac{1}{9X^3} - \frac{1}{54aX^2} - \frac{5}{162a^2X}\right] + \frac{5}{81a^2b}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^5} = -\frac{x}{b}\left[\frac{1}{12X^4} - \frac{1}{108aX^3} - \frac{1}{81a^2X^2} - \frac{5}{243a^3X}\right] + \frac{10}{243a^3b}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^6} = -\frac{x}{b}\left[\frac{1}{15X^5} - \frac{1}{180aX^4} - \frac{11}{1620a^2X^3} - \frac{11}{1215a^3X^2} - \frac{11}{729a^4X}\right]$$
$$+ \frac{22}{729a^4b}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^7} = -\frac{x}{b}\left[\frac{1}{18X^6} - \frac{1}{270aX^5} - \frac{7}{1620a^2X^4} - \frac{77}{14580a^3X^3} - \frac{77}{10935a^4X^2}\right.$$
$$\left. - \frac{77}{6561a^5X}\right] + \frac{154}{6561a^5b}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^8} = -\frac{x}{b}\left[\frac{1}{21X^7} - \frac{1}{378aX^6} - \frac{17}{5670a^2X^5} - \frac{17}{4860a^3X^4} - \frac{187}{43740a^4X^3}\right.$$
$$\left. - \frac{187}{32805a^5X^2} - \frac{187}{19683a^6X}\right] + \frac{374}{19683a^6b}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XXIX.

$$X = a + bx^3.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int\frac{x^3\partial x}{X^\mu} - \frac{a}{b}\int\frac{x^3\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{ax}{b^2}\left[\frac{1}{3\mu X^\mu} - \frac{3\mu+1}{3^2\mu(\mu-1)aX^{\mu-1}}\right] + \frac{4}{3^2\mu(\mu-1)b^2}\int\frac{\partial x}{X^{\mu-1}}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X} = \frac{x^4}{4b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^2} = \frac{x}{b^2} + \frac{ax}{3b^2X} - \frac{4a}{3b^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^3} = \frac{ax}{b^2}\left[\frac{1}{6X^2} - \frac{7}{18aX}\right] + \frac{2}{9b^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^4} = \frac{ax}{b^2}\left[\frac{1}{9X^3} - \frac{5}{27aX^2} + \frac{2}{81a^2X}\right] + \frac{4}{81ab^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^5} = \frac{ax}{b^2}\left[\frac{1}{12X^4} - \frac{13}{108aX^3} + \frac{1}{162a^2X^2} + \frac{5}{486a^3X}\right] + \frac{5}{243a^3b^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^6} = \frac{ax}{b^2}\left[\frac{1}{15X^5} - \frac{4}{45aX^4} + \frac{1}{405a^2X^3} + \frac{4}{1215a^3X^2} + \frac{4}{729a^4X}\right]$$
$$+ \frac{8}{729a^3b^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^7} = \frac{ax}{b^2}\left[\frac{1}{18X^6} - \frac{19}{270aX^5} + \frac{1}{810a^2X^4} + \frac{11}{7290a^3X^3} + \frac{22}{10935a^4X^2}\right.$$
$$\left. + \frac{22}{6561a^5X}\right] + \frac{44}{6561a^4b^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^8} = \frac{ax}{b^2}\left[\frac{1}{21X^7} - \frac{11}{189aX^6} + \frac{2}{2835a^2X^5} + \frac{1}{1215a^3X^4} + \frac{11}{10935a^4X^3}\right.$$
$$\left. + \frac{44}{32805a^5X^2} + \frac{44}{19683a^6X}\right] + \frac{88}{19683a^5b^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XXX.

$$X = a + bx^3.$$

a und b positiv oder negativ, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = k$.

$$\int \frac{x\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^2}{3\mu a X^\mu} + \frac{3\mu - 2}{3\mu a} \int \frac{x\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^2}{3a} \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{(\mu - \frac{2}{3})_\nu}{\mu_\nu (\mu - \nu) a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{(\mu - \frac{2}{3})_\mu}{a^\mu} \int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{X} = -\frac{1}{3bk}\left[\frac{1}{2}\log\frac{(x+k)^2}{x^2 - kx + k^2} - \sqrt{3}\cdot \text{Arc.Tang}\,\frac{x\sqrt{3}}{2k - x}\right].$$

$$\int \frac{x\partial x}{X^2} = \frac{x^2}{3aX} + \frac{1}{3a}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{X^3} = \frac{x^2}{a}\left[\frac{1}{6X^2} + \frac{2}{9aX}\right] + \frac{2}{9a^2}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{X^4} = \frac{x^2}{a}\left[\frac{1}{9X^3} + \frac{7}{54aX^2} + \frac{14}{81a^2X}\right] + \frac{14}{81a^3}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{X^5} = \frac{x^2}{a}\left[\frac{1}{12X^4} + \frac{5}{54aX^3} + \frac{35}{324a^2X^2} + \frac{35}{243a^3X}\right] + \frac{35}{243a^4}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{X^6} = \frac{x^2}{a}\left[\frac{1}{15X^5} + \frac{13}{180aX^4} + \frac{13}{162a^2X^3} + \frac{91}{972a^3X^2} + \frac{91}{729a^4X}\right] + \frac{91}{729a^5}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{X^7} = \frac{x^2}{a}\left[\frac{1}{18X^6} + \frac{8}{135aX^5} + \frac{26}{405a^2X^4} + \frac{52}{729a^3X^3} + \frac{182}{2187a^4X^2} + \frac{728}{6561a^5X}\right] + \frac{728}{6561a^6}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{X^8} = \frac{x^2}{a}\left[\frac{1}{21X^7} + \frac{19}{378aX^6} + \frac{152}{2835a^2X^5} + \frac{494}{8505a^3X^4} + \frac{988}{15309a^4X^3} + \frac{494}{6561a^5X^2} + \frac{1976}{19683a^6X}\right] + \frac{1976}{19683a^7}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

Tafel XXXI.

$$X = a + bx^3.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int \frac{x \partial x}{X^{\mu}} - \frac{a}{b}\int \frac{x \partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x^2}{3\mu b X^{\mu}} + \frac{2}{3\mu b}\int \frac{x \partial x}{X^{\mu}}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X} = \frac{x^2}{2b} - \frac{a}{b}\int \frac{x \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^2} = -\frac{x^2}{3bX} + \frac{2}{3b}\int \frac{x \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^3} = -\frac{x^2}{b}\left[\frac{1}{6X^2} - \frac{1}{9aX}\right] + \frac{1}{9ab}\int \frac{x \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^4} = -\frac{x^2}{b}\left[\frac{1}{9X^3} - \frac{1}{27aX^2} - \frac{4}{81a^2X}\right] + \frac{4}{81a^2b}\int \frac{x \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^5} = -\frac{x^2}{b}\left[\frac{1}{12X^4} - \frac{1}{54aX^3} - \frac{7}{324a^2X^2} - \frac{7}{243a^3X}\right] + \frac{7}{243a^3b}\int \frac{x \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^6} = -\frac{x^2}{b}\left[\frac{1}{15X^5} - \frac{1}{90aX^4} - \frac{1}{81a^2X^3} - \frac{7}{486a^3X^2} - \frac{14}{729a^4X}\right] + \frac{14}{729a^4b}\int \frac{x \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^7} = -\frac{x^2}{b}\left[\frac{1}{18X^6} - \frac{1}{135aX^5} - \frac{13}{1620a^2X^4} - \frac{13}{1458a^3X^3} - \frac{91}{8748a^4X^2} - \frac{91}{6561a^5X}\right] + \frac{91}{6561a^5b}\int \frac{x \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^8} = -\frac{x^2}{b}\left[\frac{1}{21X^7} - \frac{1}{189aX^6} - \frac{16}{2835a^2X^5} - \frac{52}{8505a^3X^4} - \frac{104}{15309a^4X^3} - \frac{52}{6561a^5X^2} - \frac{208}{19683a^6X}\right] + \frac{208}{19683a^6b}\int \frac{x \partial x}{X}.$$

Tafel XXXII.

$$X = a + bx^3.$$

$$\int \frac{x^7 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int \frac{x^4 \partial x}{X^{\mu}} - \frac{a}{b}\int \frac{x^4 \partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^7 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{ax^2}{b^2}\left[\frac{1}{3\mu X^{\mu}} - \frac{3\mu+2}{3^2\mu(\mu-1)aX^{\mu-1}}\right] + \frac{10}{3^2\mu(\mu-1)b^2}\int \frac{x \partial x}{X^{\mu-1}}.$$

$$\int \frac{x^7 \partial x}{X} = \frac{x^5}{5b} - \frac{ax^2}{2b^2} + \frac{a^2}{b^2}\int \frac{x \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^7 \partial x}{X^2} = \frac{x^2}{2b^2} + \frac{ax^2}{3b^2X} - \frac{5a}{3b^2}\int \frac{x \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^7 \partial x}{X^3} = \frac{ax^2}{b^2}\left[\frac{1}{6X^2} - \frac{4}{9aX}\right] + \frac{5}{9b^2}\int \frac{x \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^7 \partial x}{X^4} = \frac{ax^2}{b^2}\left[\frac{1}{9X^3} - \frac{11}{54aX^2} + \frac{5}{81a^2X}\right] + \frac{5}{81ab^2}\int \frac{x \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^7 \partial x}{X^5} = \frac{ax^2}{b^2}\left[\frac{1}{12X^4} - \frac{7}{54aX^3} + \frac{5}{324a^2X^2} + \frac{5}{243a^3X}\right] + \frac{5}{243a^2b^2}\int \frac{x \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^7 \partial x}{X^6} = \frac{ax^2}{b^2}\left[\frac{1}{15X^5} - \frac{17}{180aX^4} + \frac{1}{162a^2X^3} + \frac{7}{972a^3X^2} + \frac{7}{729a^4X}\right] + \frac{7}{729a^3b^2}\int \frac{x \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^7 \partial x}{X^7} = \frac{ax^2}{b^2}\left[\frac{1}{18X^6} - \frac{2}{27aX^5} + \frac{1}{324a^2X^4} + \frac{5}{1458a^3X^3} + \frac{35}{8748a^4X^2} + \frac{35}{6561a^5X}\right] + \frac{35}{6561a^4b^2}\int \frac{x \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^7 \partial x}{X^8} = \frac{ax^2}{b^2}\left[\frac{1}{21X^7} - \frac{23}{378aX^6} + \frac{1}{567a^2X^5} + \frac{13}{6804a^3X^4} + \frac{65}{30618a^4X^3} + \frac{65}{26244a^5X^2} + \frac{65}{19683a^6X}\right] + \frac{65}{19683a^5b^2}\int \frac{x \partial x}{X}.$$

Tafel XXXIII.

$$X = a + bx^3.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^2 X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int \frac{x\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^{\mu+1}} = -\frac{1}{a^{\mu+1}x} - \frac{bx^2}{a^2}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} - \frac{b\gamma}{a^{\mu+1}}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

Die Coëfficienten ergeben sich aus den Gleichungen:

$\beta_0 = \frac{1}{3\mu}$; und allgemein: $3(\mu-\nu)\beta_\nu - [3(\mu-\nu)+1]\beta_{\nu-1} = 1$,

für $\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots \mu-1$; $\gamma = \beta_{\mu-1} + 1$.

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^2} = -\frac{1}{a^2x} - \frac{bx^2}{3a^2X} - \frac{4b}{3a^2}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^3} = -\frac{1}{a^3x} - \frac{bx^2}{a^2}\left[\frac{1}{6X^2} + \frac{5}{9aX}\right] - \frac{14b}{9a^3}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^4} = -\frac{1}{a^4x} - \frac{bx^2}{a^2}\left[\frac{1}{9X^3} + \frac{8}{27aX^2} + \frac{59}{81a^2X}\right] - \frac{140b}{81a^4}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^5} = -\frac{1}{a^5x} - \frac{bx^2}{a^2}\left[\frac{1}{12X^4} + \frac{11}{54aX^3} + \frac{131}{324a^2X^2} + \frac{212}{243a^3X}\right] - \frac{455b}{243a^5}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^6} = -\frac{1}{a^6x} - \frac{bx^2}{a^2}\left[\frac{1}{15X^5} + \frac{7}{45aX^4} + \frac{23}{81a^2X^3} + \frac{121}{243a^3X^2} + \frac{727}{729a^4X}\right]$$
$$- \frac{1456b}{729a^6}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^7} = -\frac{1}{a^7x} - \frac{bx^2}{a^2}\left[\frac{1}{18X^6} + \frac{17}{135aX^5} + \frac{89}{405a^2X^4} + \frac{259}{729a^3X^3} + \frac{1271}{2187a^4X^2}\right.$$
$$\left. + \frac{7271}{6561a^5X}\right] - \frac{13832b}{6561a^7}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

Tafel XXXIV.

$$X = a + b x^3.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^{\mu+1}} = \frac{1}{a} \int \frac{\partial x}{x^5 X^{\mu}} - \frac{b}{a} \int \frac{\partial x}{x^2 X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^{\mu+1}} = -\frac{1}{4a^{\mu+1}x^4} + \frac{(\mu+1)b}{a^{\mu+2}x} + \frac{b^2x^2}{a^3} \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{b^2\gamma}{a^{\mu+2}} \int \frac{x\partial x}{X}.$$

Die Coëfficienten ergeben sich aus den Gleichungen:

$\beta_0 = \frac{1}{3\mu}$; und allgemein: $3(\mu-\nu)\beta_\nu - [3(\mu-\nu)+1]\beta_{\nu-1} = \nu + 1$,

für $\nu = 1, 2, 3, \cdots \mu - 1$; $\gamma = \beta_{\mu-1} + \mu + 1$.

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X} = -\frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{a^2x} + \frac{b^2}{a^2} \int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^2} = -\frac{1}{4a^2x^4} + \frac{2b}{a^3x} + \frac{b^2x^2}{3a^3X} + \frac{7b^2}{3a^3} \int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^3} = -\frac{1}{4a^3x^4} + \frac{3b}{a^4x} + \frac{b^2x^2}{a^3}\left[\frac{1}{6X^2} + \frac{8}{9aX}\right] + \frac{35b^2}{9a^4} \int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^4} = -\frac{1}{4a^4x^4} + \frac{4b}{a^5x} + \frac{b^2x^2}{a^3}\left[\frac{1}{9X^3} + \frac{25}{54aX^2} + \frac{131}{81a^2X}\right] + \frac{455b^2}{81a^5} \int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^5} = -\frac{1}{4a^5x^4} + \frac{5b}{a^6x} + \frac{b^2x^2}{a^3}\left[\frac{1}{12X^4} + \frac{17}{54aX^3} + \frac{281}{324a^2X^2} + \frac{605}{243a^3X}\right]$$
$$+ \frac{1820b^2}{243a^6} \int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^6} = -\frac{1}{4a^6x^4} + \frac{6b}{a^7x} + \frac{b^2x^2}{a^3}\left[\frac{1}{15X^5} + \frac{43}{180aX^4} + \frac{97}{162a^2X^3} + \frac{1327}{972a^3X^2}\right.$$
$$\left. + \frac{2542}{729a^4X}\right] + \frac{6916b^2}{729a^7} \int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^7} = -\frac{1}{4a^7x^4} + \frac{7b}{a^8x} + \frac{b^2x^2}{a^3}\left[\frac{1}{18X^6} + \frac{26}{135aX^5} + \frac{743}{1620a^2X^4} + \frac{1391}{1458a^3X^3}\right.$$
$$\left. + \frac{17027}{8748a^4X^2} + \frac{30149}{6561a^5X}\right] + \frac{76076b^2}{6561a^8} \int \frac{x\partial x}{X}.$$

Tafel XXXV.

$$X = a + bx^3.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^3 X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^{\mu+1}} = -\frac{1}{2a^{\mu+1}x^2} - \frac{bx}{a^2}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} - \frac{b\gamma}{a^{\mu+1}}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Die Coëfficienten ergeben sich aus den Gleichungen:

$\beta_0 = \frac{1}{3\mu}$; und allgemein: $3(\mu-\nu)\beta_\nu - [3(\mu-\nu)+2]\beta_{\nu-1} = 1$,

für $\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots \mu - 1$; $\gamma = 2\beta_{\mu-1} + 1$.

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X} = -\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^2} = -\frac{1}{2a^2x^2} - \frac{bx}{3a^2X} - \frac{5b}{3a^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^3} = -\frac{1}{2a^3x^2} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{6X^2} + \frac{11}{18aX}\right] - \frac{20b}{9a^3}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^4} = -\frac{1}{2a^4x^2} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{9X^3} + \frac{17}{54aX^2} + \frac{139}{162a^2X}\right] - \frac{220b}{81a^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^5} = -\frac{1}{2a^5x^2} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{12X^4} + \frac{23}{108aX^3} + \frac{73}{162a^2X^2} + \frac{527}{486a^3X}\right] - \frac{770b}{243a^5}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^6} = -\frac{1}{2a^6x^2} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{15X^5} + \frac{29}{180aX^4} + \frac{499}{1620a^2X^3} + \frac{1403}{2430a^3X^2} + \frac{1889}{1458a^4X}\right] - \frac{2618b}{729a^6}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^7} = -\frac{1}{2a^7x^2} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{18X^6} + \frac{7}{54aX^5} + \frac{19}{81a^2X^4} + \frac{290}{729a^3X^3} + \frac{3049}{4374a^4X^2} + \frac{19619}{13122a^5X}\right] - \frac{26180b}{6561a^7}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XXXVI.

$$X = a + bx^3.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^6 X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{x^3 X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^{\mu+1}} = -\frac{1}{5a^{\mu+1}x^5} + \frac{(\mu+1)b}{2a^{\mu+2}x^2} + \frac{b^2 x}{a^3}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{b^2\gamma}{a^{\mu+2}}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Die Coëfficienten ergeben sich aus den Gleichungen:

$\beta_0 = \frac{1}{3\mu}$; und allgemein: $3(\mu-\nu)\beta_\nu - [3(\mu-\nu)+2]\beta_{\nu-1} = \nu+1$,

für $\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots \mu-1$; $\gamma = 2\beta_{\mu-1} + \mu + 1$.

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X} = -\frac{1}{5ax^5} + \frac{b}{2a^2x^2} + \frac{b^2}{a^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^2} = -\frac{1}{5a^2x^5} + \frac{b}{a^3x^2} + \frac{b^2 x}{3a^3 X} + \frac{8b^2}{3a^3}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^3} = -\frac{1}{5a^3x^5} + \frac{3b}{2a^4x^2} + \frac{b^2 x}{a^3}\left[\frac{1}{6X^2} + \frac{17}{18aX}\right] + \frac{44b^2}{9a^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^4} = -\frac{1}{5a^4x^5} + \frac{2b}{a^5x^2} + \frac{b^2 x}{a^3}\left[\frac{1}{9X^3} + \frac{13}{27aX^2} + \frac{146}{81a^2X}\right] + \frac{616b^2}{81a^5}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^5} = -\frac{1}{5a^5x^5} + \frac{5b}{2a^6x^2} + \frac{b^2 x}{a^3}\left[\frac{1}{12X^4} + \frac{35}{108aX^3} + \frac{151}{162a^2X^2} + \frac{1403}{486a^3X}\right]$$
$$+ \frac{2618b^2}{243a^6}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^6} = -\frac{1}{5a^6x^5} + \frac{3b}{a^7x^2} + \frac{b^2 x}{a^3}\left[\frac{1}{15X^5} + \frac{11}{45aX^4} + \frac{256}{405a^2X^3} + \frac{1834}{1215a^3X^2}\right.$$
$$\left. + \frac{3049}{729a^4X}\right] + \frac{10472b^2}{729a^7}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 X^7} = -\frac{1}{5a^7x^5} + \frac{7b}{2a^8x^2} + \frac{b^2 x}{a^3}\left[\frac{1}{18X^6} + \frac{53}{270aX^5} + \frac{194}{405a^2X^4} + \frac{3754}{3645a^3X^3}\right.$$
$$\left. + \frac{48257}{21870a^4X^2} + \frac{74501}{13122a^5X}\right] + \frac{120428b^2}{6561a^8}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XXXVII.

$$X = a + bx^4.$$

$$\int\frac{\partial x}{X} = \frac{k}{4a\sqrt{2}}\left[\log\frac{x^2 + kx\sqrt{2} + k^2}{x^2 - kx\sqrt{2} + k^2} + 2\,\mathrm{Arc.Tang}\frac{kx\sqrt{2}}{k^2 - x^2}\right]$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X} = \frac{k^3}{4a\sqrt{2}}\left[\log\frac{x^2 - kx\sqrt{2} + k^2}{x^2 + kx\sqrt{2} + k^2} + 2\,\mathrm{Arc.Tang}\frac{kx\sqrt{2}}{k^2 - x^2}\right]$$

a und b gleiche Zeichen; $k = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$.

$$\int\frac{\partial x}{X} = \frac{k}{4a}\left[\log\frac{x+k}{x-k} + 2\,\mathrm{Arc.Tang}\frac{x}{k}\right]$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X} = \frac{k^3}{4a}\left[\log\frac{x+k}{x-k} - 2\,\mathrm{Arc.Tang}\frac{x}{k}\right]$$

a und b ungleiche Zeichen; $k = \sqrt[4]{-\frac{a}{b}}$.

$$\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x}{4\mu a X^{\mu}} + \frac{4\mu - 1}{4\mu a}\int\frac{\partial x}{X^{\mu}}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^3}{4\mu a X^{\mu}} + \frac{4\mu - 3}{4\mu a}\int\frac{x^2\partial x}{X^{\mu}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x}{4a}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{(\mu - \frac{1}{4})_{\nu}}{\mu_{\nu}(\mu - \nu)a^{\nu}X^{\mu-\nu}} + (\mu - \tfrac{1}{4})_{\mu}\frac{1}{a^{\mu}}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^3}{4a}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{(\mu - \frac{3}{4})_{\nu}}{\mu_{\nu}(\mu - \nu)a^{\nu}X^{\mu-\nu}} + (\mu - \tfrac{3}{4})_{\mu}\frac{1}{a^{\mu}}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

Tafel XXXVIII.

$$X = a + bx^4.$$

Allgemeine Formeln für $\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}}$ und $\int \frac{x^2 \partial x}{X^{\mu+1}}$ s. Taf. XXXVII.

$\int \frac{\partial x}{X}$ (s. T. XXXVII.)

$$\int \frac{\partial x}{X^2} = \frac{x}{4aX} + \frac{3}{4a} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^3} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{8X^2} + \frac{7}{32aX}\right] + \frac{21}{32a^2} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^4} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{12X^3} + \frac{11}{96aX^2} + \frac{77}{384a^2X}\right] + \frac{77}{128a^3} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^5} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{16X^4} + \frac{5}{64aX^3} + \frac{55}{512a^2X^2} + \frac{385}{2048a^3X}\right] + \frac{1155}{2048a^4} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^6} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{20X^5} + \frac{19}{320aX^4} + \frac{19}{256a^2X^3} + \frac{209}{2048a^3X^2} + \frac{1463}{8192a^4X}\right] + \frac{4389}{8192a^5} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$\int \frac{x^2 \partial x}{X}$ (s. T. XXXVII.)

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^2} = \frac{x^3}{4aX} + \frac{1}{4a} \int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^3} = \frac{x^3}{a}\left[\frac{1}{8X^2} + \frac{5}{32aX}\right] + \frac{5}{32a^2} \int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^4} = \frac{x^3}{a}\left[\frac{1}{12X^3} + \frac{3}{32aX^2} + \frac{15}{128a^2X}\right] + \frac{15}{128a^3} \int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^5} = \frac{x^3}{a}\left[\frac{1}{16X^4} + \frac{13}{192aX^3} + \frac{39}{512a^2X^2} + \frac{195}{2048a^3X}\right] + \frac{195}{2048a^4} \int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^6} = \frac{x^3}{a}\left[\frac{1}{20X^5} + \frac{17}{320aX^4} + \frac{221}{3804a^2X^3} + \frac{663}{10240a^3X^2} + \frac{663}{8192a^4X}\right] + \frac{663}{8192a^5} \int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

Tafel XXXIX.

$$X = a + bx^4.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int \frac{\partial x}{X^\mu} - \frac{a}{b}\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x}{4\mu b X^\mu} + \frac{1}{4\mu b}\int \frac{\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^2} = -\frac{x}{4bX} + \frac{1}{4b}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^3} = -\frac{x}{b}\left[\frac{1}{8X^2} - \frac{1}{32aX}\right] + \frac{3}{32ab}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^4} = -\frac{x}{b}\left[\frac{1}{12X^3} - \frac{1}{96aX^2} - \frac{7}{384a^2X}\right] + \frac{7}{128a^2b}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int \frac{x^2 \partial x}{X^\mu} - \frac{a}{b}\int \frac{x^2 \partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x^3}{4\mu b X^\mu} + \frac{3}{4\mu b}\int \frac{x^2 \partial x}{X^\mu}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X} = \frac{x^3}{3b} - \frac{a}{b}\int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^2} = -\frac{x^3}{4bX} + \frac{3}{4b}\int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^3} = -\frac{x^3}{b}\left[\frac{1}{8X^2} - \frac{3}{32aX}\right] + \frac{3}{32ab}\int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{X^4} = -\frac{x^3}{b}\left[\frac{1}{12X^3} - \frac{1}{32aX^2} - \frac{5}{128a^2X}\right] + \frac{5}{128a^2b}\int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

Tafel XL.

$$X = a + bx^4.$$

$$\int\frac{x^8\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int\frac{x^4\partial x}{X^\mu} - \frac{a}{b}\int\frac{x^4\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{ax}{b^2}\left[\frac{1}{4\mu X^\mu} - \frac{4\mu+1}{4^2\mu(\mu-1)aX^{\mu-1}}\right]$$
$$+ \frac{5}{4^2\mu(\mu-1)b^2}\int\frac{\partial x}{X^{\mu-1}}.$$

$$\int\frac{x^8\partial x}{X} = \frac{x^5}{5b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^8\partial x}{X^2} = \frac{x}{b^2} + \frac{ax}{4b^2X} - \frac{5a}{4b^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^8\partial x}{X^3} = \frac{ax}{b^2}\left[\frac{1}{8X^2} - \frac{9}{32aX}\right] + \frac{5}{32b^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^8\partial x}{X^4} = \frac{ax}{b^2}\left[\frac{1}{12X^3} - \frac{13}{96aX^2} + \frac{5}{384a^2X}\right] + \frac{5}{128ab^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{10}\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int\frac{x^6\partial x}{X^\mu} - \frac{a}{b}\int\frac{x^6\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{ax^3}{b^2}\left[\frac{1}{4\mu X^\mu} - \frac{4\mu+3}{4^2\mu(\mu-1)X^{\mu-1}}\right]$$
$$+ \frac{21}{4^2\mu(\mu-1)b^2}\int\frac{x^2\partial x}{X^{\mu-1}}.$$

$$\int\frac{x^{10}\partial x}{X} = \frac{x^7}{7b} - \frac{ax^3}{3b^2} + \frac{a^2}{b^2}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{10}\partial x}{X^2} = \frac{x^3}{3b^2} + \frac{ax^3}{4b^2X} - \frac{7a}{4b^2}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{10}\partial x}{X^3} = \frac{ax^3}{b^2}\left[\frac{1}{8X^2} - \frac{11}{32aX}\right] + \frac{21}{32b^2}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{10}\partial x}{X^4} = \frac{ax^3}{b^2}\left[\frac{1}{12X^3} - \frac{5}{32aX^2} + \frac{7}{128a^2X}\right] + \frac{7}{128ab^2}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

Tafel XLI.

$$X = a + bx^4.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^2 X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int \frac{x^2 \partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^{\mu+1}} = -\frac{1}{a^{\mu+1}x} - \frac{bx^3}{a^2}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} - \frac{b\gamma}{a^{\mu+1}}\int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$\beta_0 = \frac{1}{4\mu}$; und allgemein $4(\mu-\nu)\beta_\nu = [4(\mu-\nu)+1]\,\beta_{\nu-1} + 1$,
für $\nu = 1, 2, 3, \cdots \mu - 1$; $\gamma = \beta_{\mu-1} + 1$.

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^2} = -\frac{1}{a^2 x} - \frac{bx^3}{4a^2 X} - \frac{5b}{4a^2}\int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^3} = -\frac{1}{a^3 x} - \frac{bx^3}{a^2}\left[\frac{1}{8X^2} + \frac{13}{32aX}\right] - \frac{45b}{32a^3}\int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^4} = -\frac{1}{a^4 x} - \frac{bx^3}{a^2}\left[\frac{1}{12X^3} + \frac{7}{32aX^2} + \frac{67}{128a^2X}\right] - \frac{195b}{128a^4}\int \frac{x^2 \partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^4 X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^{\mu+1}} = -\frac{1}{3a^{\mu+1}x^3} - \frac{bx}{a^2}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} - \frac{b\gamma}{a^{\mu+1}}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$\beta_0 = \frac{1}{4\mu}$; allgemein: $4(\mu-\nu)\beta_\nu = [4(\mu-\nu)+3]\beta_{\nu-1} + 1$,
für $\nu = 1, 2, 3, \cdots \mu - 1$; $\gamma = 3\beta_{\mu-1} + 1$.

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X} = -\frac{1}{3ax^3} - \frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^2} = -\frac{1}{3a^2x^3} - \frac{bx}{4a^2X} - \frac{7b}{4a^2}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^3} = -\frac{1}{3a^3x^3} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{8X^2} + \frac{15}{32aX}\right] - \frac{77b}{32a^3}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^4} = -\frac{1}{3a^4x^3} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{12X^3} + \frac{23}{96aX^2} + \frac{257}{384a^2X}\right] - \frac{385b}{128a^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XLII.

$$X = a + bx^4.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^6X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x^6X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{x^2X^{\mu+1}} = -\frac{1}{5a^{\mu+1}x^5} + \frac{(\mu+1)b}{a^{\mu+2}x}$$

$$+\frac{b^2x^3}{a^3}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{b^2\gamma}{a^{\mu+2}}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$\beta_0 = \frac{1}{4\mu}$; allgemein $4(\mu-\nu)\beta_\nu = [4(\mu-\nu)+1]\beta_{\nu-1}+\nu+1$,

für $\nu = 1, 2, 3, \cdots \mu-1$; $\gamma = \beta_{\mu-1}+\mu+1$.

$$\int\frac{\partial x}{x^6X} = -\frac{1}{5ax^5} + \frac{b}{a^2x} + \frac{b^2}{a^2}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^6X^2} = -\frac{1}{5a^2x^5} + \frac{2b}{a^3x} + \frac{b^2x^3}{4a^3X} + \frac{9b^2}{4a^3}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^6X^3} = -\frac{1}{5a^3x^5} + \frac{3b}{a^4x} + \frac{b^2x^3}{a^3}\left[\frac{1}{8X^2} + \frac{21}{32aX}\right] + \frac{117b^2}{32a^4}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^6X^4} = -\frac{1}{5a^4x^5} + \frac{4b}{a^5x} + \frac{b^2x^3}{a^3}\left[\frac{1}{12X^3} + \frac{11}{32aX^2} + \frac{151}{128a^2X}\right]$$

$$+\frac{663b^2}{128a^5}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^8X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x^8X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{x^4X^{\mu+1}} = -\frac{1}{7a^{\mu+1}x^7} + \frac{(\mu+1)b}{3a^{\mu+2}x^3}$$

$$+\frac{b^2x}{a^3}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{b^2\gamma}{a^{\mu+2}}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$\beta_0 = \frac{1}{4\mu}$; allgemein $4(\mu-\nu)\beta_\nu = [4(\mu-\nu)+3]\beta_{\nu-1}+\nu+1$,

für $\nu = 1, 2, 3, \cdots \mu-1$; $\gamma = 3\beta_{\mu-1}+\mu+1$.

$$\int\frac{\partial x}{x^8X} = -\frac{1}{7ax^7} + \frac{b}{3a^2x^3} + \frac{b^2}{a^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^8X^2} = -\frac{1}{7a^2x^7} + \frac{2b}{3a^3x^3} + \frac{b^2x}{4a^3X} + \frac{11b^2}{4a^3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^8X^3} = -\frac{1}{7a^3x^7} + \frac{b}{a^4x^3} + \frac{b^2x}{a^3}\left[\frac{1}{8X^2} + \frac{23}{32aX}\right] + \frac{165b^2}{32a^4}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^8X^4} = -\frac{1}{7a^4x^7} + \frac{4b}{3a^5x^3} + \frac{b^2x}{a^3}\left[\frac{1}{12X^3} + \frac{35}{96aX^2} + \frac{533}{384a^2X}\right] + \frac{1045b^2}{128a^5}\int\frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XLIII.

$$X = a + bx^5.$$

a und b positiv oder negativ; $k = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}$.

$$\frac{1}{2}\log\left(x^2 - 2kx\,\mathrm{Cos}\frac{\pi}{5} + k^2\right) = P_0 \quad ; \quad \mathrm{Arc.Tang}\frac{x\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{5}}{k - x\,\mathrm{Cos}\frac{\pi}{5}} = Q_0 \ ;$$

$$\frac{1}{2}\log\left(x^2 + 2kx\,\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{5} + k^2\right) = P_1 \quad ; \quad \mathrm{Arc.Tang}\frac{x\,\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{5}}{k + x\,\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{5}} = Q_1 .$$

$$\int\frac{\partial x}{X} = \frac{2k}{5a}\left[\frac{1}{2}\log(x+k) - P_0\mathrm{Cos}\frac{\pi}{5} + P_1\,\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{5} + Q_0\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{5} + Q_1\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{5}\right].$$

$$\int\frac{x\partial x}{X} = \frac{2k^2}{5a}\left[-\frac{1}{2}\log(x+k) - P_0\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{5} + P_1\mathrm{Cos}\frac{\pi}{5} + Q_0\,\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{5} - Q_1\mathrm{Sin}\frac{\pi}{5}\right].$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X} = \frac{2k^3}{5a}\left[\frac{1}{2}\log(x+k) + P_0\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{5} - P_1\mathrm{Cos}\frac{\pi}{5} + Q_0\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{5} - Q_1\mathrm{Sin}\frac{\pi}{5}\right].$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X} = \frac{2k^4}{5a}\left[-\frac{1}{2}\log(x+k) + P_0\mathrm{Cos}\frac{\pi}{5} - P_1\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{5} + Q_0\mathrm{Sin}\frac{\pi}{5} + Q_1\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{5}\right].$$

Allgemeine Reductionsformel.

Es sei r eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, so ist:

$$\int\frac{x^{r-1}\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^r}{5\mu a X^\mu} + \frac{5\mu - r}{5\mu a}\int\frac{x^{r-1}\partial x}{X^\mu} ;$$

$$\int\frac{x^{r-1}\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^r}{5a}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{\left(\mu-\frac{r}{5}\right)_\nu}{(\mu-\nu)\mu_\nu a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{\left(\mu-\frac{r}{5}\right)_\mu}{a^\mu}\int\frac{x^{r-1}\partial x}{X} .$$

Tafel. XLIV.

$$X = a + bx^5.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x}{5\mu a X^\mu} + \frac{5\mu-1}{5\mu a}\int\frac{\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^2} = \frac{x}{5aX} + \frac{4}{5a}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^3} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{10X^2} + \frac{9}{50aX}\right] + \frac{18}{25a^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^4} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{15X^3} + \frac{7}{75aX^2} + \frac{21}{125a^2X}\right] + \frac{84}{125a^3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^5} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{20X^4} + \frac{19}{300aX^3} + \frac{133}{1500a^2X^2} + \frac{399}{2500a^3X}\right] + \frac{399}{625a^4}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^2}{5\mu a X^\mu} + \frac{5\mu-2}{5\mu a}\int\frac{x\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{X^2} = \frac{x^2}{5aX} + \frac{3}{5a}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{X^3} = \frac{x^2}{a}\left[\frac{1}{10X^2} + \frac{4}{25aX}\right] + \frac{12}{25a^2}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{X^4} = \frac{x^2}{a}\left[\frac{1}{15X^3} + \frac{13}{150aX^2} + \frac{52}{375a^2X}\right] + \frac{52}{125a^3}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^3}{5\mu a X^\mu} + \frac{5\mu-3}{5\mu a}\int\frac{x^2\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^2} = \frac{x^3}{5aX} + \frac{2}{5a}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^3} = \frac{x^3}{a}\left[\frac{1}{10X^2} + \frac{7}{50aX}\right] + \frac{7}{25a^2}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^4} = \frac{x^3}{a}\left[\frac{1}{15X^3} + \frac{2}{25aX^2} + \frac{14}{125a^2X}\right] + \frac{28}{125a^3}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^5} = \frac{x^3}{a}\left[\frac{1}{20X^4} + \frac{17}{300aX^3} + \frac{17}{250a^2X^2} + \frac{119}{1250a^3X}\right] + \frac{119}{625a^4}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^4}{5\mu a X^\mu} + \frac{5\mu-4}{5\mu a}\int\frac{x^3\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^2} = \frac{x^4}{5aX} + \frac{1}{5a}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^3} = \frac{x^4}{a}\left[\frac{1}{10X^2} + \frac{3}{25aX}\right] + \frac{3}{25a^2}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^4} = \frac{x^4}{a}\left[\frac{1}{15X^3} + \frac{11}{150aX^2} + \frac{11}{125a^2X}\right] + \frac{11}{125a^3}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

Tafel XLV.

$$X = a + bx^5.$$

(r = 1, 2, 3, 4.)

$$\int \frac{x^{r+4}\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int \frac{x^{r-1}\partial x}{X^{\mu}} - \frac{a}{b}\int \frac{x^{r-1}\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^{r+4}\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x^r}{5\mu b X^{\mu}} + \frac{r}{5\mu b}\int \frac{x^{r-1}\partial x}{X^{\mu}}.$$

$$\int \frac{x^5\partial x}{X} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^5\partial x}{X^2} = -\frac{x}{5bX} + \frac{1}{5b}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^5\partial x}{X^3} = -\frac{x}{b}\left[\frac{1}{10X^2} + \frac{1}{50aX}\right] + \frac{2}{25ab}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^5\partial x}{X^4} = -\frac{x}{b}\left[\frac{1}{15X^3} - \frac{1}{150aX^2} - \frac{3}{250a^2X}\right] + \frac{6}{125a^2b}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6\partial x}{X} = \frac{x^2}{2b} - \frac{a}{b}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6\partial x}{X^2} = -\frac{x^2}{5bX} + \frac{2}{5b}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6\partial x}{X^3} = -\frac{x^2}{b}\left[\frac{1}{10X^2} - \frac{1}{25aX}\right] + \frac{3}{25ab}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^6\partial x}{X^4} = -\frac{x^2}{b}\left[\frac{1}{15X^3} - \frac{1}{75aX^2} - \frac{8}{375a^2X}\right] + \frac{8}{125a^2b}\int \frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^7\partial x}{X} = \frac{x^3}{3b} - \frac{a}{b}\int \frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^7\partial x}{X^2} = -\frac{x^3}{5bX} + \frac{3}{5b}\int \frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^7\partial x}{X^3} = -\frac{x^3}{b}\left[\frac{1}{10X^2} - \frac{3}{50aX}\right] + \frac{3}{25ab}\int \frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^7\partial x}{X^4} = -\frac{x^3}{b}\left[\frac{1}{15X^3} - \frac{1}{50aX^2} - \frac{7}{250a^2X}\right] + \frac{7}{125a^2b}\int \frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^8\partial x}{X} = \frac{x^4}{4b} - \frac{a}{b}\int \frac{x^3\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^8\partial x}{X^2} = -\frac{x^4}{5bX} + \frac{4}{5b}\int \frac{x^3\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^8\partial x}{X^3} = -\frac{x^4}{b}\left[\frac{1}{10X^2} - \frac{2}{25aX}\right] + \frac{2}{25ab}\int \frac{x^3\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^8\partial x}{X^4} = -\frac{x^4}{b}\left[\frac{1}{15X^3} - \frac{2}{75aX^2} - \frac{4}{125a^2X}\right] + \frac{4}{125a^2b}\int \frac{x^3\partial x}{X}.$$

Tafel XLVI.

$$X = a + bx^5.$$

(r = 1, 2, 3, 4.)

$$\int\frac{x^{r+9}\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int\frac{x^{r+4}\partial x}{X^{\mu}} - \frac{a}{b}\int\frac{x^{r+4}\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{x^{r+9}\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{ax^r}{b^2}\left[\frac{1}{5\mu X^{\mu}} - \frac{5\mu+r}{5^2\mu(\mu-1)aX^{\mu-1}}\right] + \frac{(5+r)r}{5^2\mu(\mu-1)b^2}\int\frac{x^{r-1}\partial x}{X^{\mu-1}}.$$

$$\int\frac{x^{10}\partial x}{X} = \frac{x^6}{6b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{10}\partial x}{X^2} = \frac{x}{b^2} + \frac{ax}{5b^2X} - \frac{6a}{5b^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{10}\partial x}{X^3} = \frac{ax}{b^2}\left[\frac{1}{10X^2} - \frac{11}{50aX}\right] + \frac{3}{25b^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{10}\partial x}{X^4} = \frac{ax}{b^2}\left[\frac{1}{15X^3} - \frac{8}{75aX^2} + \frac{1}{125a^2X}\right] + \frac{4}{125ab^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{11}\partial x}{X} = \frac{x^7}{7b} - \frac{ax^2}{2b^2} + \frac{a^2}{b^2}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{11}\partial x}{X^2} = \frac{x^2}{2b^2} + \frac{ax^2}{5b^2X} - \frac{7a}{5b^2}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{11}\partial x}{X^3} = \frac{ax^2}{b^2}\left[\frac{1}{10X^2} - \frac{6}{25aX}\right] + \frac{7}{25b^2}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{11}\partial x}{X^4} = \frac{ax^2}{b^2}\left[\frac{1}{15X^3} - \frac{17}{150aX^2} + \frac{7}{375a^2X}\right] + \frac{7}{125ab^2}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{12}\partial x}{X} = \frac{x^8}{8b} - \frac{ax^3}{3b^2} + \frac{a^2}{b^2}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{12}\partial x}{X^2} = \frac{x^3}{3b^2} + \frac{ax^3}{5b^2X} - \frac{8a}{5b^2}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{12}\partial x}{X^3} = \frac{ax^3}{b^2}\left[\frac{1}{10X^2} - \frac{13}{50aX}\right] + \frac{12}{25b^2}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{12}\partial x}{X^4} = \frac{ax^3}{b^2}\left[\frac{1}{15X^3} - \frac{3}{25aX^2} + \frac{4}{125a^2X}\right] + \frac{8}{125ab^2}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{13}\partial x}{X} = \frac{x^9}{9b} - \frac{ax^4}{4b^2} + \frac{a^2}{b^2}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{13}\partial x}{X^2} = \frac{x^4}{4b^2} + \frac{ax^4}{5b^2X} - \frac{9a}{5b^2}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{13}\partial x}{X^3} = \frac{ax^4}{b^2}\left[\frac{1}{10X^2} - \frac{7}{25aX}\right] + \frac{18}{25b^2}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^{13}\partial x}{X^4} = \frac{ax^4}{b^2}\left[\frac{1}{15X^3} - \frac{19}{150aX^2} + \frac{6}{125a^2X}\right] + \frac{6}{125ab^2}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

Tafel XLVII.

$$X = a + bx^5.$$

$$(r = 1,\ 2,\ 3,\ 4.)\quad \int\frac{\partial x}{x^{6-r}X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x^{6-r}X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int\frac{x^{r-1}\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^{6-r}X^{\mu+1}} = -\frac{1}{(5-r)a^{\mu+1}x^{5-r}} - \frac{bx^r}{a^2}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} - \frac{b\gamma}{a^{\mu+1}}\int\frac{x^{r-1}\partial x}{X}.$$

$$\beta_0 = \frac{1}{5\mu}\ ;\ 5(\mu-\nu)\beta_\nu = [5(\mu-\nu)+5-r]\beta_{\nu-1}+1,$$

$$\text{für } \nu = 1,\ 2,\ 3, \cdots \mu-1\ ;\ \gamma = (5-r)\beta_{\mu-1}+1.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^2} = -\frac{1}{a^2x} - \frac{bx^4}{5a^2X} - \frac{6b}{5a^2}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^3} = -\frac{1}{a^3x} - \frac{bx^4}{a^2}\left[\frac{1}{10X^2} + \frac{8}{25aX}\right] - \frac{33b}{25a^3}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^4} = -\frac{1}{a^4x} - \frac{bx^4}{a^2}\left[\frac{1}{15X^3} + \frac{13}{75aX^2} + \frac{51}{125a^2X}\right] - \frac{176b}{125a^4}\int\frac{x^3\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X} = -\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{a}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^2} = -\frac{1}{2a^2x^2} - \frac{bx^3}{5a^2X} - \frac{7b}{5a^2}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^3} = -\frac{1}{2a^3x^2} - \frac{bx^3}{a^2}\left[\frac{1}{10X^2} + \frac{17}{50aX}\right] - \frac{42b}{25a^3}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^4} = -\frac{1}{2a^4x^2} - \frac{bx^3}{a^2}\left[\frac{1}{15X^3} + \frac{9}{50aX^2} + \frac{113}{500a^2X}\right] - \frac{363b}{250a^4}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X} = -\frac{1}{3ax^3} - \frac{b}{a}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^2} = -\frac{1}{3a^2x^3} - \frac{bx^2}{5a^2X} - \frac{8b}{5a^2}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^3} = -\frac{1}{3a^3x^3} - \frac{bx^2}{a^2}\left[\frac{1}{10X^2} + \frac{9}{25aX}\right] - \frac{52b}{25a^3}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^4} = -\frac{1}{3a^4x^3} - \frac{bx^2}{a^2}\left[\frac{1}{15X^3} + \frac{14}{75aX^2} + \frac{187}{375a^2X}\right] - \frac{312b}{125a^4}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^5X} = -\frac{1}{4ax^4} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^5X^2} = -\frac{1}{4a^2x^4} - \frac{bx}{5a^2X} - \frac{9b}{5a^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^5X^3} = -\frac{1}{4a^3x^4} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{10X^2} + \frac{19}{50aX}\right] - \frac{63b}{25a^3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^5X^4} = -\frac{1}{4a^4x^4} - \frac{bx}{a^2}\left[\frac{1}{15X^3} + \frac{29}{150aX^2} + \frac{137}{250a^2X}\right] - \frac{399b}{125a^4}\int\frac{\partial x}{X}.$$

Tafel XLVIII.

$$X = a + bx^6.$$

---

1. a und b gleiche Zeichen; $k = \sqrt[6]{\frac{a}{b}}$.

$$\int\frac{\partial x}{X} = \frac{k}{a}\left[\frac{1}{4\sqrt{3}}\log\frac{x^2+kx\sqrt{3}+k^2}{x^2-kx\sqrt{3}+k^2}+\frac{1}{6}\,\mathrm{Arc.Tang}\frac{kx}{k^2-x^2}+\frac{1}{3}\,\mathrm{Arc.Tang}\frac{x}{k}\right].$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X} = \frac{k^5}{a}\left[-\frac{1}{4\sqrt{3}}\log\frac{x^2+kx\sqrt{3}+k^2}{x^2-kx\sqrt{3}+k^2}+\frac{1}{6}\,\mathrm{Arc.Tang}\frac{kx}{k^2-x^2}+\frac{1}{3}\,\mathrm{Arc.Tang}\frac{x}{k}\right].$$

2. a und b ungleiche Zeichen; $k = \sqrt[6]{-\frac{a}{b}}$.

$$\int\frac{\partial x}{X} = \frac{k}{2a}\left[\frac{1}{6}\log\frac{x^2+kx+k^2}{x^2-kx+k^2}+\frac{1}{3}\log\frac{x+k}{x-k}+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arc.Tang}\frac{kx\sqrt{3}}{k^2-x^2}\right].$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X} = \frac{k^5}{2a}\left[\frac{1}{6}\log\frac{x^2+kx+k^2}{x^2-kx+k^2}+\frac{1}{3}\log\frac{x+k}{x-k}-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arc.Tang}\frac{kx\sqrt{3}}{k^2-x^2}\right].$$

$\int\frac{x\partial x}{X} = \frac{1}{2}\int\frac{\partial z}{a+bz^3}$, für $z = x^2$, s. T. XXVII; $\int\frac{x^2\partial x}{X} = \frac{1}{3}\int\frac{\partial z}{a+bz^2}$, für $z = x^3$, s. T. XIV; $\int\frac{x^3\partial x}{X} = \frac{1}{2}\int\frac{z\partial z}{a+bz^3}$, für $z = x^2$, s. T. XXX.

$$\int\frac{x^{r-1}\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^r}{6\mu a X^\mu}+\frac{6\mu-r}{6\mu a}\int\frac{x^{r-1}\partial x}{X^\mu} = \frac{x^r}{6a}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{\left(\mu-\frac{r}{6}\right)_\nu}{(\mu-\nu)\mu_\nu a^\nu X^{\mu-\nu}}$$

$$+\frac{\left(\mu-\frac{r}{6}\right)_\mu}{a^\mu}\int\frac{x^{r-1}\partial x}{X}\quad (r = 1 \text{ oder } r = 5.)$$

$$\int\frac{\partial x}{X^2} = \frac{x}{6aX}+\frac{5}{6a}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^3} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{12X^2}+\frac{11}{72aX}\right]+\frac{55}{72a^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^4} = \frac{x}{a}\left[\frac{1}{18X^3}+\frac{17}{216aX^2}+\frac{187}{1296a^2X}\right]+\frac{935}{1296a^3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X^2} = \frac{x^5}{6aX}+\frac{1}{6a}\int\frac{x^4\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X^3} = \frac{x^5}{a}\left[\frac{1}{12X^2}+\frac{7}{72aX}\right]+\frac{7}{72a^2}\int\frac{x^4\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X^4} = \frac{x^5}{a}\left[\frac{1}{18X^3}+\frac{13}{216aX^2}+\frac{91}{1296a^2X}\right]+\frac{91}{1296a^3}\int\frac{x^4\partial x}{X}.$$

Tafel XLIX.

$$X = a + bx^n.$$

Allgemeine Formeln zu den vorigen Tafeln.

r eine positive ganze Zahl, kleiner als n.

Reductionsformeln:

$$\int \frac{x^m \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{b}\int \frac{x^{m-n}\partial x}{X^{\mu}} - \frac{a}{b}\int \frac{x^{m-n}\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^m X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{x^{m-n} X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^m}{n\mu a X^{\mu}} + \frac{n\mu - m}{n\mu a}\int \frac{x^{m-1}\partial x}{X^{\mu}}.$$

Reduction für $\mu + 1 > m$.

$$\int \frac{x^{mn+r-1}\partial x}{X^{\mu+1}} = (-1)^m \frac{a^{m-1}x^r}{b^m}\sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} \frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{\gamma}{b^m}\int \frac{x^{r-1}\partial x}{X^{\mu+1-m}};$$

wo $\beta_0 = \frac{1}{n\mu}$, $n(\mu-\nu)\beta_\nu = [n(\mu+1-\nu)-r]\beta_{\nu-1} + (-1)^\nu m_\nu$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu}(-1)^\lambda \frac{\left(\mu - \frac{r}{n} - \lambda\right)_{\nu-\lambda}}{(\mu-\lambda)_{\nu-\lambda}} m_\lambda,$$

für $\nu = 1, 2, 3, \cdots m-1$; $\gamma = \frac{\left(m - 1 + \frac{r}{n}\right)_m}{\mu_m}$.

$$\int \frac{x^{mn+r-1}\partial x}{X^{\mu+1}} = \sum_{\nu=0}^{\nu=m-\mu-1} \frac{(-1)^\nu(\mu+\nu)_\nu a^\nu x^{(m-\mu-1)\nu+r}}{[(m-\mu-1)\nu + r]b^{\mu+\nu+1}}$$

$$+ \frac{(-1)^m a^{m-1}x^r}{b^m}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{(-1)^m a^{m-\mu}\gamma}{b^m}\int \frac{x^{r-1}\partial x}{X}.$$

wo $\beta_0 = \frac{1}{n\mu}$, $n(\mu-\nu)\beta_\nu = [n(\mu+1-\nu)-r)\beta_{\nu-1} + (-1)^\nu m_\nu$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu}\frac{(-1)^\lambda\left(\mu - \frac{r}{n} - \lambda\right)_{\nu-\lambda}}{(\mu-\lambda)_{\nu-\lambda}} m_\lambda,$$ für $\nu = 1, 2 \cdots \mu - 1$;

Tafel XLIX. Fortsetzung.

$$X = a + b x^n.$$

$\gamma = (n-r)\beta_{\mu-1} + (-1)^\mu m_\mu$, oder auch, wenn $\mu+1>m$,

$$(-1)^m \gamma = \frac{\Gamma(m+\frac{r}{n})}{\Gamma\frac{r}{n}} \cdot \frac{\Gamma(\mu+1-m-\frac{r}{n})}{\Gamma(1-\frac{r}{n})} \cdot \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \quad *)$$

$$= \frac{\left[\frac{r}{n}\cdot(1+\frac{r}{n})(2+\frac{r}{n})\cdots\cdots(m-1+\frac{r}{n})\right]\left[(1-\frac{r}{n})(2-\frac{r}{n})\cdots\cdots(\mu-m-\frac{r}{n})\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(\mu-1)\cdot\mu}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^{mn-r+1}X^{\mu+1}} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{(-1)^{\nu-1}(\mu+\nu)_\nu b^\nu}{[(m-\nu)n-r]\,a^{\mu+\nu+1}x^{(m-\nu)n-r}}$$

$$+\frac{(-1)^m b^m x^r}{a^{m+1}}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{\beta_\nu}{a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{(-1)^m b^m \gamma}{a^{\mu+m}}\int\frac{x^{r-1}\partial x}{X},$$

wo $\beta_0 = \frac{1}{n\mu}$; $n(\mu-\nu)\beta_\nu = [n(\mu+1-\nu)-r]\beta_{\nu-1} + (m+\nu-1)_\nu$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu}\frac{(\mu-\frac{r}{n}-\lambda)_{\nu-\lambda}}{(\mu-\lambda)_{\nu-\lambda}}(m+\lambda-1)_\lambda, \quad \text{für } \nu = 1, 2, 3\cdots\cdot\mu-1;$$

$$\gamma = (n-r)\beta_{\mu-1} + (m+\mu-1)_\mu.$$

$$\int\frac{x^{r-1}\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^r}{na}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1}\frac{(\mu-\frac{r}{n})_\nu}{(\mu-\nu)\mu_\nu a^\nu X^{\mu-\nu}} + \frac{(\mu-\frac{r}{n})_\mu}{a^\mu}\int\frac{x^{r-1}\partial x}{X}.$$

---

*) Ueber die Bezeichnung Γ s. Taf. III der vierten Abtheilung.

Tafel L.

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{a+bx^n}.$$

Reduction. Wenn unter a und b positive Grössen verstanden werden und $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = k$, $x = ky$ gesetzt wird, so hat man:

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{a+bx^n} = \frac{k^m}{a}\int \frac{y^{m-1}\partial y}{1+y^n}, \quad \int \frac{x^{m-1}\partial x}{a-bx^n} = \frac{k^m}{a}\int \frac{y^{m-1}\partial y}{1-y^n}.$$

In den folgenden Formeln sind m und n, wie bisher, positive ganze Zahlen und $m < n$.

Bezeichnungen: $\frac{1}{2}\log\left(x^2 - 2x\operatorname{Cos}\frac{(2\mu+1)\pi}{n} + 1\right) = P_\mu$;

$$\operatorname{Arc.Tang}\frac{x\operatorname{Sin}\frac{(2\mu+1)\pi}{n}}{1-x\operatorname{Cos}\frac{(2\mu+1)\pi}{n}} = Q_\mu.$$

1. n gerade.

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{1+x^n} = -\frac{2}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{n}{2}-1} P_\mu \operatorname{Cos}\frac{(2\mu+1)m\pi}{n} + \frac{2}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{n}{2}-1} Q_\mu \operatorname{Sin}\frac{(2\mu+1)m\pi}{n}$$

$$\int \frac{(x^{m-1}-x^{n-m-1})\partial x}{1+x^n} = -\frac{4}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{n}{2}-1} P_\mu \operatorname{Cos}\frac{(2\mu+1)m\pi}{n}.$$

$$\int \frac{(x^{m-1}+x^{n-m-1})\partial x}{1+x^n} = \frac{4}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{n}{2}-1} Q_\mu \operatorname{Sin}\frac{(2\mu+1)m\pi}{n}.$$

2. n ungerade.

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{1+x^n} = \frac{(-1)^{m-1}}{n}\log(1+x) - \frac{2}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{n-3}{2}} P_\mu \operatorname{Cos}\frac{(2\mu+1)m\pi}{n}$$

$$+\frac{2}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{n-3}{2}} Q_\mu \operatorname{Sin}\frac{(2\mu+1)m\pi}{n}.$$

Tafel I. Fortsetzung.

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{a+bx^n}.$$

$$\int \frac{(x^{m-1}-x^{n-m-1})\partial x}{1+x^n} = \frac{2(-1)^{m-1}}{n}\log(1+x) - \frac{4}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{n-3}{2}} P_\mu \operatorname{Cos}\frac{(2\mu+1)m\pi}{n}.$$

$$\int \frac{(x^{m-1}+x^{n-m-1})\partial x}{1+x^n} = \frac{4}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{n-3}{2}} Q_\mu \operatorname{Sin}\frac{(2\mu+1)m\pi}{n}.$$

Bezeichnungen: $\frac{1}{2}\log\left(x^2-2x\operatorname{Cos}\frac{2\mu\pi}{n}+1\right) = P_\mu$;

$$\operatorname{Arc.Tang}\frac{x\operatorname{Sin}\frac{2\mu\pi}{n}}{1-x\operatorname{Cos}\frac{2\mu\pi}{n}} = Q_\mu.$$

1. n gerade.

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{1-x^n} = -\frac{1}{n}\log(1-x) - \frac{(-1)^m}{n}\log(1+x) - \frac{2}{n}\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{n}{2}-1} P_\mu \operatorname{Cos}\frac{2\mu m\pi}{n}$$

$$+\frac{2}{n}\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{n}{2}-1} Q_\mu \operatorname{Sin}\frac{2\mu m\pi}{n}.$$

$$\int \frac{(x^{m-1}-x^{n-m-1})\partial x}{1-x^n} = \frac{4}{n}\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{n}{2}-1} Q_\mu \operatorname{Sin}\frac{2\mu m\pi}{n}.$$

$$\int \frac{(x^{m-1}+x^{n-m-1})\partial x}{1-x^n} = -\frac{2}{n}\log(1-x) - \frac{2(-1)^m}{n}\log(1+x) - \frac{4}{n}\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{n}{2}-1} P_\mu \operatorname{Cos}\frac{2\mu m\pi}{n}.$$

2. n ungerade.

Für $x = -y$ wird

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{1-x^n} = (-1)^m \int \frac{y^{m-1}\partial y}{1+y^n};$$ s. oben.

Anmerkung. Die Formeln dieser Tafel sind besondere Fälle derjenigen der folgenden Tafel, in welcher sie den Werthen 0 und π der Constanten α entsprechen.

Tafel LI.

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{x^n + e^{\alpha i}}.$$

$$(i = \sqrt{-1}\;;\; m = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots\, n-1.)$$

Bezeichn. $P_\mu = \frac{1}{2}\log\left(x^2 - 2x\,\mathrm{Cos}\,\frac{(2\mu+1)\pi+\alpha}{n} + 1\right)$;

$$Q_\mu = \mathrm{Arc.\,Tang}\,\frac{x\,\mathrm{Sin}\,\frac{(2\mu+1)\pi+\alpha}{n}}{1 - x\,\mathrm{Cos}\,\frac{(2\mu+1)\pi+\alpha}{n}}.$$

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{x^n + e^{\alpha i}} = -\frac{1}{n e^{\left(1-\frac{m}{n}\right)\alpha i}} \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} e^{(2\mu+1)\frac{m\pi i}{n}} (P_\mu + iQ_\mu)$$

$$= -\frac{1}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1}\left[P_\mu\,\mathrm{Cos}\,\frac{(2\mu+1)m\pi-(n-m)\alpha}{n} - Q_\mu\,\mathrm{Sin}\,\frac{(2\mu+1)m\pi-(n-m)\alpha}{n}\right]$$

$$-\frac{i}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1}\left[P_\mu\,\mathrm{Sin}\,\frac{(2\mu+1)m\pi-(n-m)\alpha}{n} + Q_\mu\,\mathrm{Cos}\,\frac{(2\mu+1)m\pi-(n-m)\alpha}{n}\right].$$

$$\int \frac{x^{m-1}(x^n+\mathrm{Cos}\,\alpha)\partial x}{x^{2n}+2x^n\,\mathrm{Cos}\,\alpha+1} = \frac{1}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1}\left[Q_\mu\,\mathrm{Sin}\,\frac{(2\mu+1)m\pi-(n-m)\alpha}{n} - P_\mu\,\mathrm{Cos}\,\frac{(2\mu+1)m\pi-(n-m)\alpha}{n}\right].$$

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{x^{2n}+2x^n\,\mathrm{Cos}\,\alpha+1} = \frac{1}{n\,\mathrm{Sin}\,\alpha}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1}\left[Q_\mu\,\mathrm{Cos}\,\frac{(2\mu+1)m\pi-(n-m)\alpha}{n} + P\;\mathrm{Sin}\,\frac{(2\mu+1)m\pi-(n-m)\alpha}{n}\right].$$

$$\int \frac{x^{n+m-1}\partial x}{x^{2n}+2x^n\,\mathrm{Cos}\,\alpha+1} = -\frac{1}{n\,\mathrm{Sin}\,\alpha}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1}\left[Q_\mu\,\mathrm{Cos}\,\frac{(2\mu+1)m\pi+m\alpha}{n} + P_\mu\,\mathrm{Sin}\,\frac{(2\mu+1)m\pi+m\alpha}{n}\right].$$

$$\int \frac{(x^{m-1}+x^{2n-m-1})\partial x}{x^{2n}+2x^n\,\mathrm{Cos}\,\alpha+1} = \frac{2}{n\,\mathrm{Sin}\,\alpha}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} Q_\mu\,\mathrm{Cos}\,\frac{(2\mu+1)m\pi-(n-m)\alpha}{n}.$$

$$\int \frac{(x^{m-1}-x^{2n-m-1})\partial x}{x^{2n}+2x^n\,\mathrm{Cos}\,\alpha+1} = \frac{2}{n\,\mathrm{Sin}\,\alpha}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} P_\mu\,\mathrm{Sin}\,\frac{(2\mu+1)m\pi-(n-m)\alpha}{n}.$$

Anmerkung. Die erste Gleichung ergiebt sich durch Zerlegung des Ausdrucks $\frac{x^{m-1}}{x^n+e^{\alpha i}}$ in einfache Brüche; die zweite und dritte folgen aus der ersten durch Trennung des imaginären Theils vom reellen; die vierte folgt aus der Verbindung der zweiten und dritten, und zeigt, dass die dritte Gleichung auch richtig bleibt, wenn in ihr $n+m$ statt m gesetzt wird, oder m überhaupt kleiner als $2n$ ist; die fünfte und sechste Gleichung folgen aus der dritten.

Tafel LII.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $4ac - b^2 = \Delta$.

$$\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{2cx+b}{\mu \Delta X^\mu} + \frac{2(2\mu-1)c}{\mu\Delta} \int \frac{\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{2cx+b}{\mu\Delta} \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{(\mu-\frac{1}{2})_\nu}{(\mu-1)_\nu} \left(\frac{4c}{\Delta}\right)^\nu \frac{1}{X^{\mu-\nu}} + (\mu-\tfrac{1}{2})_\mu \left(\frac{4c}{\Delta}\right)^\mu \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \text{Arc. Tang} \frac{2cx+b}{\sqrt{\Delta}}, \quad \text{wenn } \Delta \text{ positiv ist.}$$

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{\partial x}{X} &= \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \log \frac{2cx+b-\sqrt{-\Delta}}{2cx+b+\sqrt{-\Delta}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \log \frac{2cx+b-\sqrt{-\Delta}}{\sqrt{X}} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{-\Delta}} \text{Arc. Cotang} \frac{2cx+b}{\sqrt{-\Delta}} \end{aligned}\right\}, \quad \text{wenn } \Delta \text{ negativ ist.}$$

$$\int \frac{\partial x}{X^2} = \frac{2cx+b}{\Delta X} + \frac{2c}{\Delta} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^3} = \frac{2cx+b}{\Delta}\left[\frac{1}{2X^2} + \frac{3c}{\Delta X}\right] + \frac{6c^2}{\Delta^2} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^4} = \frac{2cx+b}{\Delta}\left[\frac{1}{3X^3} + \frac{5c}{3\Delta X^2} + \frac{10c^2}{\Delta^2 X}\right] + \frac{20c^3}{\Delta^3} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^5} = \frac{2cx+b}{\Delta}\left[\frac{1}{4X^4} + \frac{7c}{6\Delta X^3} + \frac{35c^2}{6\Delta^2 X^2} + \frac{35c^3}{\Delta^3 X}\right] + \frac{70c^4}{\Delta^4} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^6} = \frac{2cx+b}{\Delta}\left[\frac{1}{5X^5} + \frac{9c}{10\Delta X^4} + \frac{21c^2}{5\Delta^2 X^3} + \frac{21c^3}{\Delta^3 X^2} + \frac{126c^4}{\Delta^4 X}\right] + \frac{252c^5}{\Delta^5} \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^7} = \frac{2cx+b}{\Delta}\left[\frac{1}{6X^6} + \frac{11c}{15\Delta X^5} + \frac{33c^2}{10\Delta^2 X^4} + \frac{77c^3}{5\Delta^3 X^3} + \frac{77c^4}{\Delta^4 X^2} + \frac{462c^5}{\Delta^5 X}\right]$$
$$+ \frac{924c^6}{\Delta^6} \int \frac{\partial x}{X}.$$

Tafel LIII.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $4ac - b^2 = \Delta$.

$$\int\frac{x\,\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{1}{2\mu c X^\mu} - \frac{b}{2c}\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{bx+2a}{\mu\Delta X^\mu} - \frac{(2\mu-1)b}{\mu\Delta}\int\frac{\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{X} = \frac{1}{2c}\log X - \frac{b}{2c}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{X^2} = -\frac{bx+2a}{\Delta X} - \frac{b}{\Delta}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{X^3} = -\frac{bx+2a}{2\Delta X^2} - \frac{3b(2cx+b)}{2\Delta^2 X} - \frac{3bc}{\Delta^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{X^4} = -\frac{bx+2a}{3\Delta X^3} - \frac{5b(2cx+b)}{3\Delta^2}\left[\frac{1}{2X^2} + \frac{3c}{\Delta X}\right] - \frac{10bc^2}{\Delta^3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^2\,\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x}{(2\mu-1)cX^\mu} - \frac{(\mu-1)b}{(2\mu-1)c}\int\frac{x\,\partial x}{X^{\mu+1}} + \frac{a}{(2\mu-1)c}\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{x^2\,\partial x}{X^{\mu+1}} = \left[-\frac{x}{c} + \frac{(\mu-1)b}{2\mu c^2}\right]\frac{1}{(2\mu-1)X^\mu} + \frac{2ac+(\mu-1)b^2}{2(2\mu-1)c^2}\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{x^2\,\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{(b^2-2ac)x+ab}{\mu c\Delta X^\mu} + \frac{2ac+(\mu-1)b^2}{\mu c\Delta}\int\frac{\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{x^2\,\partial x}{X} = \frac{x}{c} - \frac{b}{2c^2}\log X + \frac{b^2-2ac}{2c^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^2\,\partial x}{X^2} = \frac{(b^2-2ac)x+ab}{c\Delta X} + \frac{2a}{\Delta}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^2\,\partial x}{X^3} = \frac{(b^2-2ac)x+ab}{2c\Delta X^2} + \frac{(2ac+b^2)(2cx+b)}{2c\Delta^2 X} + \frac{2ac+b^2}{\Delta^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^2\,\partial x}{X^4} = \frac{(b^2-2ac)x+ab}{3c\Delta X^3} + \frac{2(ac+b^2)(2cx+b)}{3c\Delta^2}\left[\frac{1}{2X^2} + \frac{3c}{\Delta X}\right] + \frac{4(ac+b^2)c}{\Delta^3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

Tafel LIV.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $4ac - b^2 = \Delta$.

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{c}\int \frac{x \partial x}{X^{\mu}} - \frac{b}{c}\int \frac{x^2 \partial x}{X^{\mu+1}} - \frac{a}{c}\int \frac{x \partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x^2}{2(\mu-1)cX^{\mu}} - \frac{(\mu-2)b}{2(\mu-1)c}\int \frac{x^2 \partial x}{X^{\mu+1}} + \frac{a}{(\mu-1)c}\int \frac{x \partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{1}{2\mu c^2 X^{\mu-1}} + \left[\frac{3bx}{(2\mu-1)c^2} + \frac{a}{\mu c^2} - \frac{(\mu-2)b^2}{2\mu(2\mu-1)c^3}\right]\frac{1}{2X^{\mu}} - \frac{6ac + (\mu-2)b^2}{4(2\mu-1)c^3} b \int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^{\mu+1}} = \left[-\frac{x^2}{c} + \frac{(\mu-2)bx}{(2\mu-1)c^2} - \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2\mu(2\mu-1)}\cdot\frac{b^2}{c^3} - \frac{a}{\mu c^2}\right]\frac{1}{2(\mu-1)X^{\mu}} - \frac{6ac + (\mu-2)b^2}{4(2\mu-1)c^3} b \int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^{\mu+1}} = \left[-\frac{x^2}{c} + \frac{2(\mu-3)ac - (\mu-2)b^2}{\mu c^2 \Delta} bx - \frac{4ac + (\mu-2)b^2}{\mu c^2 \Delta} a\right]\frac{1}{2(\mu-1)X^{\mu}} - \frac{6ac + (\mu-2)b^2}{2\mu c^2 \Delta} b \int \frac{\partial x}{X^{\mu}}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X} = \frac{x^2}{2c} - \frac{bx}{c^2} + \frac{b^2 - ac}{2c^3}\log X + \frac{3ac - b^2}{2c^3} b \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^2} = \frac{1}{2c^2}\log X + \frac{(3ac - b^2)bx + (2ac - b^2)a}{c^2 \Delta X} - \frac{6ac - b^2}{2c^2 \Delta} b \int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^3} = \left[-\frac{x^2}{c} - \frac{abx}{c\Delta} - \frac{2a^2}{c\Delta}\right]\frac{1}{2X^2} - \frac{3ab}{2c\Delta}\int \frac{\partial x}{X^2}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^4} = \left[-\frac{x^2}{c} - \frac{b^3 x}{3c^2 \Delta} - \frac{4ac + b^2}{3c^2 \Delta} a\right]\frac{1}{4X^3} - \frac{6ac + b^2}{6c^2 \Delta} b \int \frac{\partial x}{X^3}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^5} = \left[-\frac{x^2}{c} + \frac{(ac - b^2)bx}{2c^2 \Delta} - \frac{2ac + b^2}{2c^2 \Delta}\right]\frac{1}{6X^4} - \frac{3ac + b^2}{4c^2 \Delta} b \int \frac{\partial x}{X^4}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^6} = \left[-\frac{x^2}{c} + \frac{4ac - 3b^2}{5c^2 \Delta} bx - \frac{4ac + 3b^2}{5c^2 \Delta}\right]\frac{1}{8X^5} - \frac{6ac + 3b^2}{10c^2 \Delta} b \int \frac{\partial x}{X^5}.$$

Tafel LV.

$$X = a + bx + cx^2.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x^3}{(2\mu-3)cX^\mu} - \frac{(\mu-3)b}{(2\mu-3)c}\int \frac{x^3 \partial x}{X^{\mu+1}} + \frac{3a}{(2\mu-3)c}\int \frac{x^2 \partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^{\mu+1}} = \left[-\frac{x}{c^2} + \frac{(3\mu-5)b}{2(\mu-1)c^3}\right]\frac{1}{(2\mu-3)X^{\mu-1}} + \left[\left(-\frac{(7\mu-11)b^2}{2c^3} + \frac{2(\mu-2)a}{c^2}\right)x\right.$$
$$\left. + \frac{(\mu-2)(\mu-3)}{4\mu c^4}b^3 - \frac{3(\mu-1)^2 ab}{\mu c^3}\right]\frac{1}{(2\mu-1)(2\mu-3)X^\mu} + \left[\frac{3a^2}{c^2}\right.$$
$$\left. + \frac{3(\mu-2)ab^2}{c^3} + \frac{(\mu-2)(\mu-3)b^4}{4c^4}\right]\frac{1}{(2\mu-1)(2\mu-3)}\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^{\mu+1}} = \left[-x^3 + \frac{(\mu-3)bx^2}{2(\mu-1)c} - \left(\frac{3a}{(2\mu-1)c} + \frac{(\mu-2)(\mu-3)b^2}{2(2\mu-1)(\mu-1)c^2}\right)x\right.$$
$$\left. + \frac{(5\mu-3)(\mu-2)ab}{2\mu(2\mu-1)(\mu-1)c^2} + \frac{(\mu-2)(\mu-3)b^3}{4\mu(2\mu-1)c^3}\right]\frac{1}{(2\mu-3)cX^\mu} + \left[\frac{3a^2}{c^2}\right.$$
$$\left. + \frac{3(\mu-2)ab^2}{c^3} + \frac{(\mu-2)(\mu-3)b^4}{4c^4}\right]\frac{1}{(2\mu-1)(2\mu-3)}\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X} = \frac{x^3}{3c} - \frac{bx^2}{2c^2} + \frac{b^2-ac}{c^3}x + \frac{(2ac-b^2)b}{2c^4}\log X + \frac{2a^2c^2-4ab^2c+b^4}{2c^4}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^2} = \frac{x}{c^2} + \left[2\left(\frac{a}{c^2} - \frac{b^2}{c^3}\right)x + \frac{b^3}{2c^4}\right]\frac{1}{X} - \frac{b}{c^3}\log X - \left[\frac{b^4}{2c^4} - \frac{3ab^2}{c^3}\right.$$
$$\left. + \frac{3a^2}{c^2}\right]\int \frac{\partial x}{X^2}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^3} = -\left[\frac{x^3}{c} + \frac{bx^2}{2c^2} + \frac{ax}{c^3}\right]\frac{1}{X^2} + \frac{a^2}{c^2}\int \frac{\partial x}{X^3}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^4} = -\left[\frac{x^3}{3c} + \frac{ax}{5c^2} - \frac{ab}{15c^3}\right]\frac{1}{X^3} + \left(\frac{a^2}{5c^2} + \frac{ab^2}{5c^3}\right)\int \frac{\partial x}{X^4}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^5} = \left[-\frac{x^3}{5c} + \frac{bx^2}{30c^2} - \left(\frac{3a}{35c^2} + \frac{b^2}{105c^3}\right)x + \frac{17ab}{420c^3} + \frac{b^3}{280c^4}\right]\frac{1}{X^4}$$
$$+ \left[\frac{3a^2}{c^2} + \frac{6ab^2}{c^3} + \frac{b^4}{2c^4}\right]\frac{1}{35}\int \frac{\partial x}{X^5}.$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{X^6} = \left[-\frac{x^3}{7c} + \frac{6x^2}{28c^2} - \left(\frac{a}{21c^2} + \frac{b^2}{84c^3}\right)x + \frac{11ab}{420c^2} + \frac{b^3}{210c^3}\right]\frac{1}{X^5}$$
$$+ \left[\frac{3a^2}{c^2} + \frac{9ab^2}{c^3} + \frac{3b^4}{2c^4}\right]\frac{1}{63}\int \frac{\partial x}{X^6}.$$

Tafel LVI.

$$X = a + bx + cx^2.$$

$$\int\frac{x^5\,\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x^4}{2(\mu-2)cX^{\mu}} - \frac{(\mu-4)b}{2(\mu-2)c}\int\frac{x^4\,\partial x}{X^{\mu+1}} + \frac{2a}{(\mu-2)c}\int\frac{x^3\,\partial x}{X^{\mu+1}}.\,^{*)}$$

$$\int\frac{x^5\,\partial x}{X} = \frac{x^4}{4c} - \frac{bx^3}{3c^2} + \left(\frac{b^2}{c^3} - \frac{a}{c^2}\right)\frac{x^2}{2} - \left(\frac{b^3}{c^4} - \frac{2ab}{c^3}\right)x + \left[\frac{b^4}{2c^5} - \frac{3ab^2}{2c^4}\right.$$
$$\left. + \frac{a^2}{2c^3}\right]\log X - \left[\frac{b^5}{2c^5} - \frac{5ab^3}{2c^4} + \frac{5a^2b}{2c^3}\right]\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^5\,\partial x}{X^2} = \frac{x^2}{2c^2} - \frac{2bx}{c^3} + \left(\frac{3b^2}{2c^4} - \frac{a}{c^3}\right)\log X + \left[\left(\frac{5b^3}{2c^4} - \frac{5ab}{c^3}\right)x + \frac{3b^4}{4c^5} - \frac{ab^2}{c^4}\right.$$
$$\left. - \frac{a^2}{2c^3}\right]\frac{1}{X} + \left[\frac{3b^5}{4c^5} - \frac{5ab^3}{c^4} + \frac{15a^2b}{2c^3}\right]\int\frac{\partial x}{X^2}.$$

$$\int\frac{x^5\,\partial x}{X^3} = \frac{1}{2c^3}\log X + \left[\frac{5bx^3}{2c^2} + \left(\frac{9b^2}{4c^3} + \frac{a}{c^2}\right)x^2 + \left(\frac{b^3}{6c^4} + \frac{7ab}{2c^3}\right)x - \frac{b^4}{24c^5}\right.$$
$$\left. + \frac{ab^2}{2c^4} + \frac{3a^2}{4c^3}\right]\frac{1}{X^2} - \left[\frac{b^5}{12c^5} - \frac{5ab^3}{6c^4} + \frac{5a^2b}{2c^3}\right]\int\frac{\partial x}{X^3}.$$

$$\int\frac{x^5\,\partial x}{X^4} = -\left[\frac{x^4}{2c} + \frac{bx^3}{6c^2} + \frac{ax^2}{2c^2} + \frac{a^2}{6c^3}\right]\frac{1}{X^3} - \frac{a^2b}{2c^3}\int\frac{\partial x}{X^4}.$$

$$\int\frac{x^5\,\partial x}{X^5} = -\left[\frac{x^4}{4c} + \frac{ax^2}{6c^2} - \frac{abx}{21c^3} + \frac{ab^2}{56c^4} + \frac{a^2}{24c^3}\right]\frac{1}{X^4} - \left(\frac{ab^3}{14c^4} + \frac{3a^2b}{14c^3}\right)\int\frac{\partial x}{X^5}.$$

---

*) Die vollständige Entwickelung der allgemeinen Formel ist hier und auf der folgenden Tafel ihrer Weitläufigkeit wegen unterblieben.

Tafel LVII.

$$X = a + bx + cx^2.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x^5}{(2\mu-5)cX^\mu} - \frac{\mu-5}{2\mu-5}\cdot\frac{b}{c}\int\frac{x^5\partial x}{X^{\mu+1}} + \frac{5a}{(2\mu-5)c}\int\frac{x^4\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X} = \frac{x^5}{5c} - \frac{bx^4}{4c^2} + \left(\frac{b^2}{c^3} - \frac{a}{c^2}\right)\frac{x^3}{3} - \left(\frac{b^3}{c^4} - \frac{2ab}{c^3}\right)\frac{x^2}{2} + \left(\frac{b^4}{c^5} - \frac{3ab^2}{c^4} + \frac{a^2}{c^3}\right)x$$
$$- \left(\frac{b^5}{2c^6} - \frac{2ab^3}{c^5} + \frac{3a^2b}{2c^4}\right)\log X + \left(\frac{b^6}{2c^6} - \frac{3ab^4}{c^5} + \frac{9a^2b^2}{2c^4} - \frac{a^3}{c^3}\right)\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^2} = \frac{x^3}{3c^2} - \frac{bx^2}{c^3} + \left(\frac{3b^2}{c^4} - \frac{2a}{c^3}\right)x - \left(\frac{2b^3}{c^5} - \frac{3ab}{c^4}\right)\log X$$
$$- \left[\left(\frac{3b^4}{c^5} - \frac{9ab^2}{c^4} + \frac{3a^2}{c^3}\right)x + \frac{b^5}{c^6} - \frac{5ab^3}{2c^5}\right]\frac{1}{X}$$
$$- \left(\frac{b^6}{c^6} - \frac{15ab^2}{2c^5} + \frac{15a^2b^2}{c^4} - \frac{5a^3}{c^3}\right)\int\frac{\partial x}{X^2}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^3} = \frac{x}{c^3} - \frac{3b}{2c^4}\log X - \left[\left(\frac{9b^2}{2c^3} - \frac{3a}{c^2}\right)x^3 + \left(\frac{19b^3}{4c^4} - \frac{3ab}{2c^3}\right)x^2\right.$$
$$\left. + \left(\frac{b^4}{2c^5} + \frac{13ab^2}{2c^4} - \frac{4a^2}{c^3}\right)x - \frac{b^5}{8c^6} + \frac{3ab^3}{2c^5} + \frac{a^2b}{4c^4}\right]\frac{1}{X^2}$$
$$+ \left(\frac{b^6}{4c^6} - \frac{5ab^4}{2c^5} + \frac{15a^2b^2}{2c^4} - \frac{5a^3}{c^3}\right)\int\frac{\partial x}{X^3}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^4} = -\left[\frac{x^5}{c} + \frac{bx^4}{c^2} + \left(\frac{b^2}{c^3} + \frac{5a}{c^2}\right)\frac{x^3}{3} + \frac{abx^2}{c^3} + \frac{a^2x}{c^3}\right]\frac{1}{X^3} + \frac{a^3}{c^3}\int\frac{\partial x}{X^4}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^5} = -\left[\frac{x^5}{3c} + \frac{bx^4}{12c^2} + \frac{ax^3}{3c^2} + \frac{a^2x}{7c^3} - \frac{3a^2b}{56c^4}\right]\frac{1}{X^4} + \left(\frac{3a^2b^2}{14c^4} + \frac{a^3}{7c^3}\right)\int\frac{\partial x}{X^5}.$$

$$\int\frac{x^6\partial x}{X^6} = -\left[\frac{x^5}{5c} + \frac{ax^3}{7c^2} - \frac{abx^2}{28c^3} + \left(\frac{ab^2}{84c^4} + \frac{a^2}{21c^3}\right)x - \frac{ab^3}{210c^5} - \frac{11a^2b}{420c^4}\right]\frac{1}{X^5}$$
$$+ \left(\frac{ab^4}{420c^5} + \frac{a^2b^2}{7c^4} + \frac{a^3}{21c^3}\right)\int\frac{\partial x}{X^6}.$$

Tafel LVIII.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $\Delta = 4ac - b^2$.

Allgemeine Formeln zu Tafel LII bis LVII.

$$\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{2cx+b}{\mu \Delta X^{\mu}} + \frac{2(2\mu-1)c}{\mu\Delta} \int \frac{\partial x}{X^{\mu}}. \quad \text{s. Taf. LII.}$$

$$\int \frac{x\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{1}{2\mu c X^{\mu}} - \frac{b}{2c} \int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}}. \quad \text{s. Taf. LIII.}$$

$$\int \frac{x^m \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{c} \int \frac{x^{m-2}\partial x}{X^{\mu}} - \frac{b}{c} \int \frac{x^{m-1}\partial x}{X^{\mu+1}} - \frac{a}{c} \int \frac{x^{m-2}\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^m \partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x^{m-1}}{(2\mu-m+1)cX^{\mu}} - \frac{\mu-m+1}{2\mu-m+1} \cdot \frac{b}{c} \int \frac{x^{m-1}\partial x}{X^{\mu+1}}$$
$$+ \frac{m-1}{2\mu-m+1} \cdot \frac{a}{c} \int \frac{x^{m-2}\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^m \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{X^{\mu}} \sum_{\nu=1}^{\nu=m} (\alpha_\nu x^{m-\nu}) + \beta \int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

Die Coëfficienten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$, β folgen aus den Gleichungen:

$(m-2\mu-1)c\alpha_1 = 1.$, $(m-2\mu-2)c\alpha_2 + (m-\mu-1)b\alpha_1 = 0$,

$(m-2\mu-\nu)c\alpha_\nu + (m-\mu-\nu+1)b\alpha_{\nu-1} + (m-\nu+2)a\alpha_{\nu-2} = 0$;

(für $\nu = 3, 4, \cdots m$)

und $\beta = \mu b \alpha_m - a\alpha_{m-1}$.

$$\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{2cx+b}{\mu\Delta} \sum_{\nu=0}^{\nu=\lambda-1} \frac{(\mu-\frac{1}{2})_\nu}{(\mu-1)_\nu} \left(\frac{4c}{\Delta}\right)^{\nu} \frac{1}{X^{\mu-\nu}} + \frac{(\mu-\frac{1}{2})_\lambda}{\mu_\lambda} \left(\frac{4c}{\Delta}\right)^{\lambda} \int \frac{\partial x}{X^{\mu-\lambda+1}}.$$

In dieser Formel kann für λ jede ganze Zahl zwischen 1 und μ genommen werden. Für $\lambda = \mu$ erhält man die Formel in Tafel LII.

Tafel LIX.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $\Delta = 4ac - b^2$; $q = \frac{ac}{\Delta}$.

Reductionen. $$\int\frac{\partial x}{xX^{\mu+1}} = \frac{1}{2\mu aX^{\mu}} + \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{xX^{\mu}} - \frac{b}{2a}\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^{\mu+1}} = \frac{1}{2a^{\mu+1}}\log\frac{x^2}{X} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}\frac{1}{2\nu a^{\mu-\nu+1}X^{\nu}} - \frac{b}{2a^{\mu+1}}\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu+1} a^{\nu-1}\int\frac{\partial x}{X^{\nu}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^{\mu+1}} = \frac{1}{2a^{\mu+1}}\log\frac{x^2}{X} + \frac{1}{2a^{\mu}}\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}\left[\frac{1}{\nu} - \frac{b(2cx+b)\alpha_{\nu}}{\Delta}\right]\frac{a^{\nu-1}}{X^{\nu}} - \frac{b\beta}{2a^{\mu+1}}\int\frac{\partial x}{X}.$$

Die Coëffic. sind: $\alpha_{\nu} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu-\nu}\frac{(\nu+\lambda-\frac{1}{2})_{\lambda}}{(\nu+\lambda-1)_{\lambda}}\cdot\frac{4^{\lambda}q^{\lambda}}{\nu+\lambda}$; $\beta = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu}(\lambda-\frac{1}{2})_{\lambda}4^{\lambda}q^{\lambda}$; *)

für $\lambda = 1, 2, 3 \cdots \mu$. Man hat auch

$2(2\nu-1)q\alpha_{\nu} = (\nu-1)\alpha_{\nu-1} - 1$, für $\nu = 2, 3 \cdots \mu$ und $2q\alpha_1 = \beta - 1$.

$$\int\frac{\partial x}{xX} = \frac{1}{2a}\log\frac{x^2}{X} - \frac{b}{2a}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^2} = \frac{1}{2a^2}\log\frac{x^2}{X} + \frac{1}{2aX}\left[1 - \frac{b(2cx+b)}{\Delta}\right] - \frac{b}{2a^2}(1+2q)\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^3} = \frac{1}{2a^3}\log\frac{x^2}{X} + \frac{1}{2a^2X}\left[1 + \frac{a}{2X}\right] - \frac{b(2cx+b)}{2a^2\Delta X}\left[1 + 3q + \frac{a}{2X}\right]$$
$$- \frac{b}{2a^3}\left[1 + 2q + 6q^2\right]\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^4} = \frac{1}{2a^4}\log\frac{x^2}{X} + \frac{1}{2a^3X}\left[1 + \frac{a}{2X} + \frac{a^2}{3X^2}\right] - \frac{b(2cx+b)}{2a^3\Delta X}\left[1 + 3q + 10q^2\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{2} + \frac{5q}{3}\right)\frac{a}{X} + \frac{a^2}{3X^2}\right] - \frac{b}{2a^4}\left[1 + 2q + 6q^2 + 20q^3\right]\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^5} = \frac{1}{2a^5}\log\frac{x^2}{X} + \frac{1}{2a^4X}\left[1 + \frac{a}{2X} + \frac{a^2}{3X^2} + \frac{a^3}{4X^3}\right] - \frac{b(2cx+b)}{2a^4\Delta X}\left[1 + 3q\right.$$
$$\left. + 10q^2 + 35q^3 + \left(\frac{1}{2} + \frac{5q}{3} + \frac{35q^2}{6}\right)\frac{a}{X} + \left(\frac{1}{3} + \frac{7q}{6}\right)\frac{a^2}{X^2} + \frac{a^3}{4X^3}\right]$$
$$- \frac{b}{2a^5}\left[1 + 2q + 6q^2 + 20q^3 + 70q^4\right]\int\frac{\partial x}{X}.$$

---

*) Statt dessen kann man auch schreiben $\beta = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu}(-\frac{1}{2})_{\lambda}(-4q)^{\lambda}$; d. h. β entsteht aus der Entwicklung von $(1-4q)^{-\frac{1}{2}}$.

Tafel LX.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $\Delta = 4ac - b^2$.

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^{\mu+1}} = -\frac{1}{axX^\mu} - \frac{(\mu+1)b}{a}\int\frac{\partial x}{xX^{\mu+1}} - \frac{(2\mu+1)c}{a}\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^{\mu+1}} = -\left[\frac{1}{ax} + \frac{(\mu+1)b}{2\mu a^2} + \left(\frac{(2\mu+1)c}{\mu a} - \frac{(\mu+1)b^2}{2\mu a^2}\right)\frac{2cx+b}{\Delta}\right]\frac{1}{X^\mu}$$
$$-\frac{(\mu+1)b}{a^2}\int\frac{\partial x}{xX^\mu} + \left(\frac{(\mu+1)b^2}{\mu a^2} - \frac{2(2\mu+1)c}{\mu a}\right)\frac{(2\mu-1)c}{\Delta}\int\frac{\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X} = \frac{b}{2a^2}\log\frac{X}{x^2} - \frac{1}{ax} + \left(\frac{b^2}{2a^2} - \frac{c}{a}\right)\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^2} = \frac{b}{a^3}\log\frac{X}{x^2} - \frac{1}{a^2x} + \left[\frac{b^3}{a^2} - \frac{3bc}{a} + \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}\right)cx\right]\frac{1}{\Delta X}$$
$$-\left(\frac{b^4}{a^3} - \frac{6b^2c}{a^2} + \frac{6c^2}{a}\right)\frac{1}{\Delta}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^3} = -\left[\frac{1}{ax} + \frac{3b}{4a^2} + \left(\frac{5c}{2a} - \frac{3b^2}{4a^2}\right)\frac{2cx+b}{\Delta}\right]\frac{1}{X^2} - \frac{3b}{a^2}\int\frac{\partial x}{xX^2}$$
$$+\left(\frac{3b^2}{2a^2} - \frac{5c}{a}\right)\frac{3c}{\Delta}\int\frac{\partial x}{X^2}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^4} = -\left[\frac{1}{ax} + \frac{2b}{3a^2} + \left(\frac{7c}{3a} - \frac{2b^2}{3a^2}\right)\frac{2cx+b}{\Delta}\right]\frac{1}{X^3} - \frac{4b}{a^2}\int\frac{\partial x}{xX^3}$$
$$+\left(\frac{2b^2}{3a^2} - \frac{7c}{3a}\right)\frac{10c}{\Delta}\int\frac{\partial x}{X^3}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^5} = -\left[\frac{1}{ax} + \frac{5b}{8a^2} + \left(\frac{9c}{4a} - \frac{5b^2}{8a^2}\right)\frac{2cx+b}{\Delta}\right]\frac{1}{X^4} - \frac{5b}{a^2}\int\frac{\partial x}{xX^4}$$
$$+\left(\frac{5b^2}{4a^2} - \frac{9c}{2a}\right)\frac{7c}{\Delta}\int\frac{\partial x}{X^4}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^6} = -\left[\frac{1}{ax} + \frac{3b}{5a^2} + \left(\frac{11c}{5a} - \frac{3b^2}{5a^2}\right)\frac{2cx+b}{\Delta}\right]\frac{1}{X^5} - \frac{6b}{a^2}\int\frac{\partial x}{xX^5}$$
$$+\left(\frac{3b^2}{5a^2} - \frac{11c}{5a}\right)\frac{18c}{\Delta}\int\frac{\partial x}{X^5}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^7} = -\left[\frac{1}{ax} + \frac{7b}{12a^2} + \left(\frac{13c}{6a} - \frac{7b^2}{12a^2}\right)\frac{2cx+b}{\Delta}\right]\frac{1}{X^6} - \frac{7b}{a^2}\int\frac{\partial x}{xX^6}$$
$$+\left(\frac{7b^2}{6a^2} - \frac{13c}{3a}\right)\frac{11c}{\Delta}\int\frac{\partial x}{X^6}.$$

Tafel LXI.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $\Delta = 4ac - b^2$.

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^{\mu+1}} = -\frac{1}{2ax^2X^\mu} - \frac{\mu+2}{2}\cdot\frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{x^2X^{\mu+1}} - \frac{(\mu+1)c}{a}\int\frac{\partial x}{xX^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^{\mu+1}} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{(\mu+2)b}{2a^2x}\right]\frac{1}{X^\mu} + (\mu+1)\left(\frac{(\mu+2)b^2}{2a^3} - \frac{c}{a}\right)\int\frac{\partial x}{xX^{\mu+1}}$$
$$+ \frac{(\mu+2)(2\mu+1)bc}{2a^2}\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X} = -\frac{1}{2ax^2} + \frac{b}{a^2x} + \left(\frac{b^2}{2a^3} - \frac{c}{2a^2}\right)\log\frac{x^2}{X} + \left(\frac{3bc}{2a^2} - \frac{b^3}{2a^3}\right)\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^2} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{3b}{2a^2x}\right]\frac{1}{X} + \left(\frac{3b^2}{a^3} - \frac{2c}{a}\right)\int\frac{\partial x}{xX^2} + \frac{9bc}{2a^2}\int\frac{\partial x}{X^2}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^3} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{2b}{a^2x}\right]\frac{1}{X^2} + \left(\frac{6b^2}{a^3} - \frac{3c}{a}\right)\int\frac{\partial x}{xX^3} + \frac{10bc}{a^2}\int\frac{\partial x}{X^3}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^4} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{5b}{2a^2x}\right]\frac{1}{X^3} + \left(\frac{10b^2}{a^3} - \frac{4c}{a}\right)\int\frac{\partial x}{xX^4} + \frac{35bc}{2a^2}\int\frac{\partial x}{X^4}$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^5} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{3b}{a^2x}\right]\frac{1}{X^4} + \left(\frac{15b^2}{a^3} - \frac{5c}{a}\right)\int\frac{\partial x}{xX^5} + \frac{27bc}{a^2}\int\frac{\partial x}{X^5}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^6} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{7b}{2a^2x}\right]\frac{1}{X^5} + \left(\frac{21b^2}{a^3} - \frac{6c}{a}\right)\int\frac{\partial x}{xX^6} + \frac{77bc}{2a^2}\int\frac{\partial x}{X^6}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^7} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{4b}{a^2x}\right]\frac{1}{X^6} + \left(\frac{28b^2}{a^3} - \frac{7c}{a}\right)\int\frac{\partial x}{xX^7} + \frac{52bc}{a^2}\int\frac{\partial x}{X^7}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^8} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{9b}{2a^2x}\right]\frac{1}{X^7} + \left(\frac{36b^2}{a^3} - \frac{8c}{a}\right)\int\frac{\partial x}{xX^8} + \frac{135bc}{2a^2}\int\frac{\partial x}{X^8}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^9} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{5b}{a^2x}\right]\frac{1}{X^8} + \left(\frac{45b^2}{a^3} - \frac{9c}{a}\right)\int\frac{\partial x}{xX^9} + \frac{85bc}{a^2}\int\frac{\partial x}{X^9}.$$

Tafel LXII.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $\Delta = 4ac - b^2.$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^{\mu+1}} = -\frac{1}{3ax^3X^\mu} - \frac{(\mu+3)b}{3a}\int\frac{\partial x}{x^3X^{\mu+1}} - \frac{(2\mu+3)c}{3a}\int\frac{\partial x}{x^2X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 X^{\mu+1}} = \left[-\frac{1}{3ax^3} + \frac{(\mu+3)b}{6a^2x^2} + \left(\frac{(2\mu+3)c}{3a^2} - \frac{(\mu+2)(\mu+3)b^2}{6a^3}\right)\frac{1}{x}\right]\frac{1}{X^\mu}$$
$$+ (\mu+1)(\mu+2)\left(\frac{bc}{a^2} - \frac{(\mu+3)b^3}{6a^3}\right)\int\frac{\partial x}{xX^{\mu+1}}$$
$$+ (2\mu+1)\left(\frac{(2\mu+3)c^2}{3a^2} - \frac{(\mu+2)(\mu+3)b^2c}{6a^3}\right)\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X} = \left(\frac{bc}{a^3} - \frac{b^3}{2a^4}\right)\log\frac{x^2}{X} - \frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{2a^2x^2} - \left(\frac{b^2}{a^3} - \frac{c}{a^2}\right)\frac{1}{x}$$
$$+ \left(\frac{c^2}{a^2} - \frac{2b^2c}{a^3} + \frac{b^4}{2a^4}\right)\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^2} = \left[-\frac{1}{3ax^3} + \frac{2b}{3a^2x^2} + \left(\frac{5c}{3a^2} - \frac{2b^2}{a^3}\right)\frac{1}{x}\right]\frac{1}{X} + \left(\frac{6bc}{a^2} - \frac{4b^3}{a^3}\right)\int\frac{\partial x}{xX^2}$$
$$+ \left(\frac{5c}{a^2} - \frac{6b^2c}{a^3}\right)\int\frac{\partial x}{X^2}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^3} = \left[-\frac{1}{3ax^3} + \frac{5b}{6a^2x^2} + \left(\frac{7c}{3a^2} - \frac{10b^2}{3a^3}\right)\frac{1}{x}\right]\frac{1}{X^2} + \left(\frac{12bc}{a^2} - \frac{10b^3}{a^3}\right)\int\frac{\partial x}{xX^3}$$
$$+ \left(\frac{35c^2}{3a^2} - \frac{50b^2c}{3a^3}\right)\int\frac{\partial x}{X^3}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^4} = \left[-\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{a^2x^2} + \left(\frac{3c}{a^2} - \frac{5b^2}{a^3}\right)\frac{1}{x}\right]\frac{1}{X^3} + \left(\frac{20bc}{a^2} - \frac{20b^3}{a^3}\right)\int\frac{\partial x}{xX^4}$$
$$+ \left(\frac{21c^2}{a^2} - \frac{35b^2c}{a^3}\right)\int\frac{\partial x}{X^4}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^5} = \left[-\frac{1}{3ax^3} + \frac{7b}{6a^2x^2} + \left(\frac{11c}{3a^2} - \frac{7b^3}{a^3}\right)\frac{1}{x}\right]\frac{1}{X^4} + \left(\frac{30bc}{a^2} - \frac{35b^3}{a^3}\right)\int\frac{\partial x}{xX^5}$$
$$+ \left(\frac{33c^2}{a^2} - \frac{63b^2c}{a^3}\right)\int\frac{\partial x}{X^5}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^6} = \left[-\frac{1}{3ax^3} + \frac{4b}{3a^2x^2} + \left(\frac{13c}{3a^2} - \frac{28b^2}{3a^3}\right)\frac{1}{x}\right]\frac{1}{X^5} + \left(\frac{42bc}{a^2} - \frac{56b^3}{a^3}\right)\int\frac{\partial x}{xX^6}$$
$$+ \left(\frac{143c^2}{3a^2} - \frac{308b^2c}{3a^3}\right)\int\frac{\partial x}{X^6}.$$

Tafel LXIII.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $\Delta = 4ac - b^2$.

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^{\mu+1}} = -\frac{1}{4ax^4 X^\mu} - \frac{(\mu+4)b}{4a} \int \frac{\partial x}{x^4 X^{\mu+1}} - \frac{(\mu+2)c}{2a} \int \frac{\partial x}{x^3 X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^{\mu+1}} = \Big[-\frac{1}{4ax^4} + \frac{(\mu+4)b}{12a^2x^3} + \left(\frac{(\mu+2)c}{4a^2} - \frac{(\mu+3)(\mu+4)b^2}{24a^3}\right)\frac{1}{x^2}$$
$$+ \left(\frac{(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)b^3}{24a^4} - \frac{(5\mu^2+23\mu+24)bc}{12a^3}\right)\frac{1}{x}\Big]\frac{1}{X^\mu}$$
$$+ (\mu+1)(\mu+2)\left(\frac{(\mu+3)(\mu+4)b^4}{24a^4} - \frac{(\mu+3)b^2c}{2a^3} + \frac{c^2}{2a^2}\right)\int \frac{\partial x}{xX^{\mu+1}}.$$
$$+ (2\mu+1)\left(\frac{(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)b^3c}{24a^4} - \frac{(5\mu^2+23\mu+24)bc^2}{12a^3}\right)\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X} = \left(\frac{b^4}{2a^5} - \frac{3b^2c}{2a^4} + \frac{c^2}{2a^3}\right)\log\frac{x^2}{X} - \frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{3a^2x^3} - \left(\frac{b^2}{2a^3} - \frac{c}{2a^2}\right)\frac{1}{x^2}$$
$$- \left(\frac{2bc}{a^3} - \frac{b^3}{a^4}\right)\frac{1}{x} - \left(\frac{b^5}{2a^5} - \frac{5b^3c}{2a^4} + \frac{5bc^2}{2a^3}\right)\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^2} = \Big[-\frac{1}{4ax^4} + \frac{5b}{12a^2x^3} + \left(\frac{3c}{4a^2} - \frac{5b^2}{6a^3}\right)\frac{1}{x^2} + \left(\frac{5b^3}{2a^4} - \frac{13bc}{3a^3}\right)\frac{1}{x}\Big]\frac{1}{X}$$
$$+ \left(\frac{5b^4}{a^4} - \frac{12b^2c}{a^3} + \frac{3c^2}{a^2}\right)\int \frac{\partial x}{xX^2} + \left(\frac{15b^3c}{2a^4} - \frac{13bc^2}{a^3}\right)\int \frac{\partial x}{X^2}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^3} = \Big[-\frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{2a^2x^3} + \left(\frac{c}{a^2} - \frac{5b^2}{4a^3}\right)\frac{1}{x^2} + \left(\frac{5b^3}{a^4} - \frac{15bc}{2a^3}\right)\frac{1}{x}\Big]\frac{1}{X^2}$$
$$+ \left(\frac{15b^4}{a^4} - \frac{30b^2c}{a^3} + \frac{6c^2}{a^2}\right)\int \frac{\partial x}{xX^3} + \left(\frac{25b^3c}{a^4} - \frac{75bc^2}{2a^3}\right)\int \frac{\partial x}{X^3}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 X^4} = \Big[-\frac{1}{4ax^4} + \frac{7b}{12a^2x^3} + \left(\frac{5c}{4a^2} - \frac{7b^2}{4a^3}\right)\frac{1}{x^2} + \left(\frac{35b^3}{4a^4} - \frac{23bc}{2a^3}\right)\frac{1}{x}\Big]\frac{1}{X^3}$$
$$+ \left(\frac{35b^4}{a^4} - \frac{60b^2c}{a^3} + \frac{10c^2}{a^2}\right)\int \frac{\partial x}{xX^4} + \left(\frac{245b^3c}{4a^4} - \frac{161bc^2}{2a^3}\right)\int \frac{\partial x}{X^4}.$$

Tafel LXIV.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Allgemeine Formeln zu Tafel LIX bis LXIII.

$$\int \frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^m X^{\mu}} - \frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{x^{m-1} X^{\mu+1}} - \frac{c}{a}\int \frac{\partial x}{x^{m-2} X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}X^{\mu}} - \frac{\mu+m-1}{m-1}\cdot\frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{x^{m-1} X^{\mu+1}}$$

$$-\frac{2\mu+m-1}{m-1}\cdot\frac{c}{a}\int \frac{\partial x}{x^{m-2} X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = \frac{1}{X^{\mu}}\sum_{\nu=1}^{\nu=m-1}\frac{\alpha_\nu}{x^{m-\nu}} + \beta\int \frac{\partial x}{x X^{\mu+1}} + \gamma\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

Die Coëfficienten ergeben sich aus den Gleichungen:

$$(m-1)a\alpha_1 + 1 = 0 \quad , \quad (m-2)a\alpha_2 + (\mu+m-1)b\alpha_1 = 0,$$

$$(m-\nu-1)\,a\alpha_{\nu+1} + (\mu+m-\nu)\,b\alpha_\nu + (2\mu+m-\nu+1)\,c\alpha_{\nu-1} = 0,$$

$$(\text{für } \nu = 2,\ 3,\ \cdots\ m-2)$$

$$\beta = (\mu+1)[b\alpha_{m-1} + 2c\alpha_{m-2}] \quad \text{und} \quad \gamma = (2\mu+1)c\alpha_{m-1}.$$

Tafel LXV.

$$X = a + bx^2 + cx^4$$

1. $b^2 - 4ac$ positiv. Bez. $\sqrt{b^2-4ac} = g$.

$$\int\frac{\partial x}{X} = \frac{2c}{g}\int\frac{\partial x}{2cx^2+b-g} - \frac{2c}{g}\int\frac{\partial x}{2cx^2+b+g}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X} = \frac{g-b}{g}\int\frac{\partial x}{2cx^2+b-g} + \frac{g+b}{g}\int\frac{\partial x}{2cx^2+b+g}.$$

2. $b^2 - 4ac$ negativ. Bez. $q = \sqrt[4]{\frac{a}{c}}$; $\operatorname{Cos}\varepsilon = -\frac{b}{2\sqrt{ac}}$.

$$\int\frac{\partial x}{X} = \frac{1}{8cq^3\operatorname{Cos}\frac{\varepsilon}{2}}\log\frac{x^2+2qx\operatorname{Cos}\frac{\varepsilon}{2}+q^2}{x^2-2qx\operatorname{Cos}\frac{\varepsilon}{2}+q^2} + \frac{1}{4cq^3\operatorname{Sin}\frac{\varepsilon}{2}}\operatorname{Arc.Tang}\frac{2qx\operatorname{Sin}\frac{\varepsilon}{2}}{q^2-x^2}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X} = \frac{1}{8cq\operatorname{Cos}\frac{\varepsilon}{2}}\log\frac{x^2-2qx\operatorname{Cos}\frac{\varepsilon}{2}+q^2}{x^2+2qx\operatorname{Cos}\frac{\varepsilon}{2}+q^2} + \frac{1}{4cq\operatorname{Sin}\frac{\varepsilon}{2}}\operatorname{Arc.Tang}\frac{2qx\operatorname{Sin}\frac{\varepsilon}{2}}{q^2-x^2}.$$

$$\int\frac{x^m\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{c}\int\frac{x^{m-4}\partial x}{X^\mu} - \frac{b}{c}\int\frac{x^{m-2}\partial x}{X^{\mu+1}} - \frac{a}{c}\int\frac{x^{m-4}\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^mX^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x^mX^\mu} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{x^{m-2}X^{\mu+1}} - \frac{c}{a}\int\frac{\partial x}{x^{m-4}X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{x^m\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{(2cx^2+b)x^{m-1}}{2\mu(4ac-b^2)X^\mu} + \frac{(4\mu-m-1)c}{\mu(4ac-b^2)}\int\frac{x^m\partial x}{X^\mu}$$
$$-\frac{(m-1)b}{2\mu(4ac-b^2)}\int\frac{x^{m-2}\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^mX^{\mu+1}} = \frac{bcx^2+b^2-2ac}{2\mu a(b^2-4ac)x^{m-1}X^\mu} + \frac{(4\mu+m-3)bc}{2\mu a(b^2-4ac)}\int\frac{\partial x}{x^{m-2}X^\mu}$$
$$+\frac{(2\mu+m-1)b^2-2(4\mu+m-1)ac}{2\mu a(b^2-4ac)}\int\frac{\partial x}{x^mX^\mu}.$$

Tafel LXVI.

$$X = a + bx^2 + cx^4.$$

Bez. $\Delta = 4ac - b^2$.

$$\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{bcx^3 + (b^2-2ac)x}{2\mu a\Delta X^\mu} - \frac{(4\mu-3)bc}{2\mu a\Delta}\int\frac{x^2\partial x}{X^\mu}$$
$$+ \frac{2(4\mu-1)ac - (2\mu-1)b^2}{2\mu a\Delta}\int\frac{\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{2cx^3+bx}{2\mu\Delta X^\mu} + \frac{(4\mu-3)c}{\mu\Delta}\int\frac{x^2\partial x}{X^\mu} - \frac{b}{2\mu\Delta}\int\frac{\partial x}{X^\mu}.$$

$\int\frac{\partial x}{X}$ und $\int\frac{x^2\partial x}{X}$ s. vorige Tafel.

$$\int\frac{\partial x}{X^2} = -\frac{bcx^3+(b^2-2ac)x}{2a\Delta X} - \frac{bc}{2a\Delta}\int\frac{x^2\partial x}{X} + \frac{6ac-b^2}{2a\Delta}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^2} = \frac{2cx^3+bx}{2\Delta X} + \frac{c}{\Delta}\int\frac{x^2\partial x}{X} - \frac{b}{2\Delta}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^3} = -\frac{bcx^3+(b^2-2ac)x}{4a\Delta X^2} + \frac{3(b^2-8ac)bcx^3+(3b^4-25ab^2c+28a^2c^2)x}{8a^2\Delta^2 X}$$
$$+ \frac{3(b^2-8ac)bc}{8a^2\Delta^2}\int\frac{x^2\partial x}{X} + \frac{3(b^4-9ab^2c+28a^2c^2)}{8a^2\Delta^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^3} = \frac{2cx^3+bx}{4\Delta X^2} + \frac{(b^2+20ac)cx^3+(b^2+8ac)bx}{8a\Delta^2 X} + \frac{(b^2+20ac)c}{8a\Delta^2}\int\frac{x^2\partial x}{X}$$
$$+ \frac{(b^2-16ac)b}{8a\Delta^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^4} = -\frac{bcx^3+(b^2-2ac)x}{6a\Delta X^3} - \frac{3bc}{2a\Delta}\int\frac{x^2\partial x}{X^3} - \frac{5b^2-22ac}{6a\Delta}\int\frac{\partial x}{X^3}.$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{X^4} = \frac{2cx^3+bx}{6\Delta X^3} + \frac{3c}{\Delta}\int\frac{x^2\partial x}{X^3} - \frac{b}{6\Delta}\int\frac{\partial x}{X^3}.$$

Tafel LXVII.

$$X = a + bx^2 + cx^4.$$

Bez. $\Delta = 4ac - b^2$.

$$\int\frac{x^4\,\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{(2cx^2+b)x^3}{2\mu\Delta X^\mu} + \frac{(4\mu-5)c}{\mu\Delta}\int\frac{x^4\,\partial x}{X^\mu} - \frac{3b}{2\mu\Delta}\int\frac{x^2\,\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{x^4\,\partial x}{X} = \frac{x}{c} - \frac{a}{c}\int\frac{\partial x}{X} - \frac{b}{c}\int\frac{x^2\,\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^4\,\partial x}{X^2} = -\frac{bx^3+2ax}{2\Delta X} + \frac{a}{\Delta}\int\frac{\partial x}{X} - \frac{b}{2\Delta}\int\frac{x^2\,\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^4\,\partial x}{X^3} = \frac{2cx^5+bx^3}{4\Delta X^2} - \frac{12bcx^3+3(b^2+4ac)x}{8\Delta^2 X} + \frac{3(b^2+4ac)}{8\Delta^2}\int\frac{\partial x}{X}$$
$$- \frac{3bc}{2\Delta^2}\int\frac{x^2\,\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^6\,\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{2cx^7+bx^5}{2\mu\Delta X^\mu} + \frac{(4\mu-7)c}{\mu\Delta}\int\frac{x^6\,\partial x}{X^\mu} - \frac{5b}{2\mu\Delta}\int\frac{x^4\,\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{x^6\,\partial x}{X} = \frac{x^3}{3c} - \frac{bx}{c^2} + \frac{ab}{c^2}\int\frac{\partial x}{X} + \left(\frac{b^2}{c^2} - \frac{a}{c}\right)\int\frac{x^2\,\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^6\,\partial x}{X^2} = \frac{(b^2-2ac)x^3+abx}{2c\Delta X} - \frac{ab}{2c\Delta}\int\frac{\partial x}{X} + \frac{6ac-b^2}{2c\Delta}\int\frac{x^2\,\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^6\,\partial x}{X^3} = \frac{2cx^7+bx^5}{4\Delta X^2} + \frac{(7b^2-4ac)x^3+12abx}{8\Delta^2 X} - \frac{3ab}{2\Delta^2}\int\frac{\partial x}{X}$$
$$+ \frac{3(b^2+4ac)}{8\Delta^2}\int\frac{x^2\,\partial x}{X}.$$

Tafel LXVIII.

$$X = a + bx^2 + cx^4.$$

Bez. $\Delta = 4ac - b^2$.

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^{\mu+1}} = \frac{2cx^2+b}{2\mu\Delta x^3X^\mu} + \frac{(4\mu+1)c}{\mu\Delta}\int\frac{\partial x}{x^2X^\mu} + \frac{3b}{2\mu\Delta}\int\frac{\partial x}{x^4X^\mu}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^{\mu+1}} = -\frac{bcx^2+b^2-2ac}{2\mu a\Delta x^3X^\mu} - \frac{(4\mu+1)bc}{2\mu a\Delta}\int\frac{\partial x}{x^2X^\mu}$$
$$+\frac{2(4\mu+3)ac-(2\mu+3)b^2}{2\mu a\Delta}\int\frac{\partial x}{x^4X^\mu}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{X} - \frac{c}{a}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X} = -\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{a^2x} + \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}\right)\int\frac{\partial x}{X} + \frac{bc}{a^2}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^2} = \frac{2cx^2+b}{2\Delta x^3X} - \frac{b}{2a\Delta x^3} - \frac{3b^2+10ac}{2a^2\Delta x} - \frac{3b^3+7abc}{2a^2\Delta}\int\frac{\partial x}{X}$$
$$+\frac{(3b^2-10ac)c}{2a^2\Delta}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^2} = -\frac{bcx^2+b^2-2ac}{2a\Delta x^3X} + \frac{5b^2-14ac}{6a^2\Delta x^3} + \frac{19abc-5b^3}{2a^3\Delta x}$$
$$+\frac{24ab^2c-14a^2c^2-5b^4}{2a^3\Delta}\int\frac{\partial x}{X} + \frac{(19ac-5b^2)bc}{2a^3\Delta}\int\frac{x^2\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^3} = \frac{2cx^2+b}{4\Delta x^3X^2} + \frac{9c}{2\Delta}\int\frac{\partial x}{x^2X^2} + \frac{3b}{4\Delta}\int\frac{\partial x}{x^4X^2}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4X^3} = -\frac{bcx^2+b^2-2ac}{4a\Delta x^3X^2} - \frac{5bc}{4a\Delta}\int\frac{\partial x}{x^2X^2} + \frac{22ac-7b^2}{4a\Delta}\int\frac{\partial x}{x^4X^2}.$$

Tafel LXIX.

$$X = a + bx^3 + cx^6.$$

---

1. $b^2 - 4ac$ positiv. Bez. $\sqrt{b^2 - 4ac} = g$.

$$\int\frac{\partial x}{X} = \frac{2c}{g}\int\frac{\partial x}{2cx^3+b-g} - \frac{2c}{g}\int\frac{\partial x}{2cx^3+b+g}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{X} = \frac{2c}{g}\int\frac{x\partial x}{2cx^3+b-g} - \frac{2c}{g}\int\frac{x\partial x}{2cx^3+b+g}.$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X} = \frac{g-b}{g}\int\frac{\partial x}{2cx^3+b-g} + \frac{g+b}{g}\int\frac{\partial x}{2cx^3+b+g}.$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X} = \frac{g-b}{g}\int\frac{x\partial x}{2cx^3+b-g} + \frac{g+b}{g}\int\frac{x\partial x}{2cx^3+b+g}.$$

2. $b^2 - 4ac$ negativ. Bez. $q = \sqrt[6]{\frac{a}{c}}$, $\mathrm{Cos}\,\varepsilon = -\frac{b}{2\sqrt{ac}}$,

$$\varepsilon_0 = \tfrac{1}{3}\varepsilon \quad , \quad \varepsilon_1 = \tfrac{1}{3}(2\pi + \varepsilon) \quad , \quad \varepsilon_2 = \tfrac{1}{3}(4\pi + \varepsilon),$$

$$\tfrac{1}{2}\log(x^2 - 2qx\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon_0 + q^2) = P_0 \quad , \quad \tfrac{1}{2}\log(x^2 - 2qx\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon_1 + q^2) = P_1 ,$$
$$\tfrac{1}{2}\log(x^2 - 2qx\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon_2 + q^2) = P_2 .$$

$$\mathrm{Arc.Tang}\frac{x\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon_0}{q - x\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon_0} = Q_0 \quad , \quad \mathrm{Arc.Tang}\frac{x\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon_1}{q - x\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon_1} = Q_1$$
$$\mathrm{Arc.Tang}\frac{x\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon_2}{q - x\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon_2} = Q_2 .$$

$$\int\frac{\partial x}{X} = \frac{1}{3cq^5\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon}\left[\begin{matrix} -P_0\,\mathrm{Sin}\,2\varepsilon_0 - P_1\,\mathrm{Sin}\,2\varepsilon_1 - P_2\,\mathrm{Sin}\,2\varepsilon_2 \\ +Q_0\,\mathrm{Cos}\,2\varepsilon_0 + Q_1\,\mathrm{Cos}\,2\varepsilon_1 + Q_2\,\mathrm{Cos}\,2\varepsilon_2 \end{matrix}\right].$$

$$\int\frac{x\partial x}{X} = \frac{1}{3cq^4\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon}\left[\begin{matrix} -P_0\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon_0 - P_1\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon_1 - P_2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon_2 \\ +Q_0\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon_0 + Q_1\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon_1 + Q_2\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon_2 \end{matrix}\right].$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X} = \frac{1}{3cq^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon}\left[\begin{matrix} +P_0\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon_0 + P_1\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon_1 + P_2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon_2 \\ +Q_0\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon_0 + Q_1\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon_1 + Q_2\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon_2 \end{matrix}\right].$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X} = \frac{1}{3cq\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon}\left[\begin{matrix} +P_0\,\mathrm{Sin}\,2\varepsilon_0 + P_1\,\mathrm{Sin}\,2\varepsilon_1 + P_2\,\mathrm{Sin}\,2\varepsilon_2 \\ +Q_0\,\mathrm{Cos}\,2\varepsilon_0 + Q_1\,\mathrm{Cos}\,2\varepsilon_1 + Q_2\,\mathrm{Cos}\,2\varepsilon_2 \end{matrix}\right].$$

Tafel LXX.

$$X = a + bx^3 + cx^6.$$

Bez. $\Delta = 4ac - b^2$.

$$\int\frac{x^m\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{c}\int\frac{x^{m-6}\partial x}{X^\mu} - \frac{b}{c}\int\frac{x^{m-3}\partial x}{X^{\mu+1}} - \frac{a}{c}\int\frac{x^{m-6}\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x^m X^\mu} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{x^{m-3}X^{\mu+1}} - \frac{c}{a}\int\frac{\partial x}{x^{m-6}X^{\mu+1}}.$$

$$\int\frac{x^m\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{(2cx^3+b)x^{m-2}}{3\mu\Delta X^\mu} + \frac{2(6\mu-m-1)c}{3\mu\Delta}\int\frac{x^m\partial x}{X^\mu} - \frac{(m-2)b}{3\mu\Delta}\int\frac{x^{m-3}\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = -\frac{bcx^3+b^2-2ac}{3\mu a\Delta x^{m-1}X^\mu} - \frac{(6\mu+m-4)bc}{3\mu a\Delta}\int\frac{\partial x}{x^{m-3}X^\mu}$$
$$+ \frac{2(6\mu+m-1)ac-(3\mu+m-1)b^2}{3\mu a\Delta}\int\frac{\partial x}{x^m X^\mu}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{bcx^4+(b^2-2ac)x}{3\mu a\Delta X^\mu} - \frac{2(3\mu-2)bc}{3\mu a\Delta}\int\frac{x^3\partial x}{X^\mu}$$
$$+ \frac{2(6\mu-1)ac-(3\mu-1)b^2}{3\mu a\Delta}\int\frac{\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{2cx^4+bx}{3\mu\Delta X^\mu} + \frac{4(3\mu-2)c}{3\mu\Delta}\int\frac{x^3\partial x}{X^\mu} - \frac{b}{3\mu\Delta}\int\frac{\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^2} = -\frac{bcx^4+(b^2-2ac)x}{3a\Delta X} - \frac{2bc}{3a\Delta}\int\frac{x^3\partial x}{X} + \frac{2(5ac-b^2)}{3a\Delta}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{X^2} = \frac{2cx^4+bx}{3\Delta X} + \frac{4c}{3\Delta}\int\frac{x^3\partial x}{X} - \frac{b}{3\Delta}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{bcx^5+(b^2-2ac)x^2}{3\mu a\Delta X^\mu} - \frac{(6\mu-5)bc}{3\mu a\Delta}\int\frac{x^4\partial x}{X^\mu}$$
$$+ \frac{4(3\mu-1)ac-(3\mu-2)b^2}{3\mu a\Delta}\int\frac{x\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{2cx^5+bx^2}{3\mu\Delta X^\mu} + \frac{2(6\mu-5)c}{3\mu\Delta}\int\frac{x^4\partial x}{X^\mu} - \frac{2b}{3\mu\Delta}\int\frac{x\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{X^2} = -\frac{bcx^5+(b^2-2ac)x^2}{3a\Delta X} - \frac{bc}{3a\Delta}\int\frac{x^4\partial x}{X} + \frac{8ac-b^2}{3a\Delta}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{X^2} = \frac{2cx^5+bx^2}{3\Delta X} + \frac{2c}{3\Delta}\int\frac{x^4\partial x}{X} - \frac{2b}{3\Delta}\int\frac{x\partial x}{X}.$$

Tafel LXXI.

$$X = a + bx^n + cx^{2n}.$$

1. $b^2 - 4ac$ positiv. Bez. $b^2 - 4ac = g^2$; $m < n$.

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{X} = \frac{2c}{g}\int \frac{x^{m-1}\partial x}{2cx^n+b-g} - \frac{2c}{g}\int \frac{x^{m-1}\partial x}{2cx^n+b+g}.$$

$$\int \frac{x^{n+m-1}\partial x}{X} = \frac{g-b}{g}\int \frac{x^{m-1}\partial x}{2cx^n+b-g} + \frac{g+b}{g}\int \frac{x^{m-1}\partial x}{2cx^n+b+g}.$$

2. $b^2 - 4ac$ negativ. Bez. $q = \sqrt[2n]{\frac{a}{c}}$; $\operatorname{Cos} \varepsilon = -\frac{b}{2\sqrt{ac}}$; $\varepsilon_\mu = \frac{2\mu\pi + \varepsilon}{n}$;

$$\tfrac{1}{2}\log(x^2 - 2qx\operatorname{Cos}\varepsilon_\mu + q^2) = P_\mu \quad ; \quad \operatorname{Arc.Tang}\frac{x\operatorname{Sin}\varepsilon_\mu}{q - x\operatorname{Cos}\varepsilon_\mu} = Q_\mu.$$

$$m < 2n.$$

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{X} = \frac{1}{ncq^{2n-m}\operatorname{Sin}\varepsilon}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1}[-P_\mu \operatorname{Sin}(n-m)\varepsilon_\mu + Q_\mu \operatorname{Cos}(n-m)\varepsilon_\mu].$$

$$\int \frac{(q^m x^{2n-m-1} - q^{2n-m}x^{m-1})\partial x}{X} = \frac{2}{nc\operatorname{Sin}\varepsilon}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} P_\mu \operatorname{Sin}(n-m)\varepsilon_\mu.$$

$$\int \frac{(q^m x^{2n-m-1} + q^{2n-m}x^{m-1})\partial x}{X} = \frac{2}{nc\operatorname{Sin}\varepsilon}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} Q_\mu \operatorname{Cos}(n-m)\varepsilon_\mu.$$

Anmerkung. Diese drei Formeln kommen auf diejenigen der Tafel LI zurück, wenn man $\pi + \alpha$ statt ε schreibt.

Bez. $\Delta = 4ac - b^2$.

$$\int \frac{x^m \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{c}\int \frac{x^{m-2n}\partial x}{X^\mu} - \frac{b}{c}\int \frac{x^{m-n}\partial x}{X^{\mu+1}} - \frac{a}{c}\int \frac{x^{m-2n}\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^m X^\mu} - \frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{x^{m-n}X^{\mu+1}} - \frac{c}{a}\int \frac{\partial x}{x^{m-2n}X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^m \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{2cx^n + b}{\mu n \Delta X^\mu}x^{m-n+1} + \frac{2(2\mu n - m - 1)c}{\mu n \Delta}\int \frac{x^m \partial x}{X^\mu} - \frac{(m-n+1)b}{\mu n \Delta}\int \frac{x^{m-n}\partial x}{X^\mu}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = -\frac{bcx^n + b^2 - 2ac}{\mu n a \Delta x^{m-1}X^\mu} - \frac{(2\mu n - n + m - 1)bc}{\mu n a \Delta}\int \frac{\partial x}{x^{m-n}X^\mu}$$
$$\frac{2(2\mu n + m - 1)ac - (\mu n + m - 1)b^2}{\mu n a \Delta}\int \frac{\partial x}{x^m X^\mu}.$$

Tafel LXXII.

$$X = c_0 x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3 = f(x).$$

Die Gleichung $X = 0$ habe drei ungleiche Wurzeln r_1, r_2, r_3.

$$f'(x) = 3c_0 x^2 + 2c_1 x + c_2 = \frac{\partial X}{\partial x}.$$

$$i = \sqrt{-1}.$$

1. Wenn die Wurzeln der Gleichung $X = 0$ alle reell sind, so ist:

$$\int \frac{\partial x}{X} = \frac{1}{f'(r_1)} \log(x - r_1) + \frac{1}{f'(r_2)} \log(x - r_2) + \frac{1}{f'(r_3)} \log(x - r_3).$$

$$\int \frac{x \partial x}{X} = \frac{r_1}{f'(r_1)} \log(x - r_1) + \frac{r_2}{f'(r_2)} \log(x - r_2) + \frac{r_3}{f'(r_3)} \log(x - r_3).$$

2. Wenn die Gleichung $X = 0$ zwei imaginäre Wurzeln hat, nämlich $r_2 = \alpha + \beta i$, $r_3 = \alpha - \beta i$, und die dritte reelle Wurzel mit r bezeichnet wird, so ist:

$$\int \frac{\partial x}{X} = \frac{1}{f'(r)} \left[\log(x - r) - \tfrac{1}{2} \log[(x - \alpha)^2 + \beta^2] + \frac{\alpha - r}{\beta} \operatorname{Arc.Tang} \frac{x - \alpha}{\beta} \right].$$

$$\int \frac{x \partial x}{X} = \frac{1}{f'(r)} \left[r \log(x - r) - \tfrac{1}{2} r \log[(x - \alpha)^2 + \beta^2] \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha^2 - \alpha r + \beta^2}{\beta} \operatorname{Arc.Tang} \frac{x - \alpha}{\beta} \right].$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X} = \frac{1}{3c_0} \log X - \frac{2c_1}{3c_0} \int \frac{x \partial x}{X} - \frac{c_2}{3c_0} \int \frac{\partial x}{X}.$$

Fortsetzung. **Tafel LXXII.**

$$X = c_0 x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3.$$

$$\int \frac{x^m \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{c_0}\int \frac{x^{m-3}\partial x}{X^{\mu}} - \frac{c_1}{c_0}\int \frac{x^{m-1}\partial x}{X^{\mu+1}} - \frac{c_2}{c_0}\int \frac{x^{m-2}\partial x}{X^{\mu+1}} - \frac{c_3}{c_0}\int \frac{x^{m-3}\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^m \partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x^{m-2}}{(3\mu-m+2)c_0 X^{\mu}} - \frac{2\mu-m+2}{3\mu-m+2}\cdot\frac{c_1}{c_0}\int \frac{x^{m-1}\partial x}{X^{\mu+1}}$$
$$-\frac{\mu-m+2}{3\mu-m+2}\cdot\frac{c_2}{c_0}\int \frac{x^{m-2}\partial x}{X^{\mu+1}} + \frac{m-2}{3\mu-m+2}\cdot\frac{c_3}{c_0}\int \frac{x^{m-3}\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{1}{3\mu c_0 X^{\mu}} - \frac{2c_1}{3c_0}\int \frac{x\partial x}{X^{\mu+1}} - \frac{c_2}{3c_0}\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{3\mu-1}\Bigg[\left(-\frac{x}{c_0} + \frac{(2\mu-1)c_1}{3\mu c_0^2}\right)\frac{1}{X^{\mu}}$$
$$+\left(\frac{2(2\mu-1)c_1^2}{3c_0^2} - \frac{(\mu-1)c_2}{c_0}\right)\int \frac{x\partial x}{X^{\mu+1}} + \left(\frac{c_3}{c_0} + \frac{(2\mu-1)c_1c_2}{3c_0^2}\right)\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}}\Bigg].$$

Bezeichn.: $C_0 = \frac{c_1}{9c_0}$; $C_1 = \frac{2}{3}c_2 - \frac{2c_1^2}{9c_0}$; $C_2 = 3c_0c_3 - \frac{5}{3}c_1c_2 + \frac{4c_1^3}{9c_0}$;

$$C_3 = -6c_1c_2c_3 - 2c_0c_2^2 + 4c_1^2c_2 - \frac{8c_1^3}{9c_0};\quad C_1C_3 - C_2C_2 = D;$$

$u_0 = \frac{9c_0^2C_1}{D}$; $u_1 = -\frac{3c_0C_2}{D}$; $v_0 = -\frac{3c_0(C_2+2c_1C_1)}{D}$; $v_1 = \frac{C_3+2c_1C_2}{D}$.

Die vorstehenden Coëfficienten C_0, C_1, C_2, C_3 entspringen aus der Entwickelung:

$$X\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^{-1} = \tfrac{1}{3}x + C_0 + \frac{C_1}{3c_0x} + \frac{C_2}{9c_0^2x^2} + \frac{C_3}{27c_0^3x^3} + \cdots\cdots$$

Reductions-Formeln.

$$\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}} = \left[\tfrac{1}{3}u_0x^2 + (C_0u_0 + \tfrac{1}{3}u_1)x + C_0u_1 + \frac{C_1u_0}{3c_0}\right]\frac{1}{\mu X^{\mu}} + \frac{3\mu-2}{3\mu}u_0\int \frac{x\partial x}{X^{\mu}}$$
$$+\frac{(3\mu-1)u_1 - 3C_0u_0}{3\mu}\int \frac{\partial x}{X^{\mu}}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{X^{\mu+1}} = \left[\tfrac{1}{3}v_0x^2 + (C_0v_0 + \tfrac{1}{3}v_1)x + C_0v_1 + \frac{C_1v_0}{3c_0}\right]\frac{1}{\mu X^{\mu}} + \frac{3\mu-2}{3\mu}v_0\int \frac{x\partial x}{X^{\mu}}$$
$$+\frac{(3\mu-1)v_1 - 3C_0v_0}{3\mu}\int \frac{\partial x}{X^{\mu}};$$

Tafel LXXIII.

$$X = c_0 x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = \frac{1}{c_3}\int \frac{\partial x}{x^m X^{\mu}} - \frac{c_2}{c_3}\int \frac{\partial x}{x^{m-1} X^{\mu+1}} - \frac{c_1}{c_3}\int \frac{\partial x}{x^{m-2} X^{\mu+1}} - \frac{c_0}{c_3}\int \frac{\partial x}{x^{m-3} X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = -\frac{1}{(m-1)c_3 x^{m-1} X^{\mu}} - \frac{(3\mu+m-1)c_0}{(m-1)c_3}\int \frac{\partial x}{x^{m-3} X^{\mu+1}}$$

$$- \frac{(2\mu+m-1)c_1}{(m-1)c_3}\int \frac{\partial x}{x^{m-2} X^{\mu+1}} - \frac{(\mu+m-1)c_2}{(m-1)c_3}\int \frac{\partial x}{x^{m-1} X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x X^{\mu+1}} = \frac{1}{3\mu c_3 X^{\mu}} - \frac{c_1}{3c_3}\int \frac{x\partial x}{X^{\mu+1}} - \frac{2c_2}{3c_3}\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}} + \frac{1}{c_3}\int \frac{\partial x}{x X^{\mu}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x X} = \frac{1}{3c_3}\log\frac{x^3}{X} - \frac{c_1}{3c_3}\int \frac{x\partial x}{X} - \frac{2c_2}{3c_3}\int \frac{\partial x}{X}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x X^2} = \frac{1}{3c_3 X} + \frac{1}{c_3}\int \frac{\partial x}{x X} - \frac{c_1}{3c_3}\int \frac{x\partial x}{X^2} - \frac{2c_2}{3c_3}\int \frac{\partial x}{X^2}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2 X^{\mu+1}} = -\frac{1}{c_3 x X^{\mu}} - \frac{(3\mu+1)c_0}{c_3}\int \frac{x\partial x}{X^{\mu+1}} - \frac{(2\mu+1)c_1}{c_3}\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}}$$

$$- \frac{(\mu+1)c_2}{c_3}\int \frac{\partial x}{x X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 X^{\mu+1}} = \left[\frac{(\mu+2)c_2}{2c_3^2 x} - \frac{1}{2c_3 x^2}\right]\frac{1}{X^{\mu}} + \frac{(\mu+2)(3\mu+1)c_0 c_2}{2c_3^2}\int \frac{x\partial x}{X^{\mu+1}}$$

$$+ \left(\frac{(\mu+2)(2\mu+1)c_1 c_2}{2c_3^2} - \frac{(3\mu+2)c_0}{2c_3}\right)\int \frac{\partial x}{X^{\mu+1}}$$

$$+ \left(\frac{(\mu+1)(\mu+2)c_2^2}{2c_3^2} - \frac{(\mu+1)c_1}{c_3}\right)\int \frac{\partial x}{x X^{\mu+1}}.$$

Tafel LXXIV.

$$X = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots\cdots + c_{n-1} x + c_n = f(x).$$

$$\frac{\partial^\nu X}{\partial x^\nu} = f^\nu(x).$$

In dieser Tafel ist m eine positive ganze, μ eine beliebige Zahl.

A. $$\int \frac{x^m \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{1}{c_0} \int \frac{x^{m-n} \partial x}{X^\mu} - \frac{1}{c_0} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_\nu \int \frac{x^{m-\nu} \partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^m \partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{x^{m-n+1}}{(n\mu - m + n - 1) c_0 X^\mu} - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{(n-\nu)\mu - m + n - 1}{n\mu - m + n - 1} \cdot \frac{c_\nu}{c_0} \int \frac{x^{m-\nu} \partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^{n-1} \partial x}{X^{\mu+1}} = -\frac{1}{n\mu c_0 X^\mu} - \sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} \frac{(n-\nu) c_\nu}{n c_0} \int \frac{x^{n-\nu-1} \partial x}{X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{x^{n-1} \partial x}{X} = \frac{1}{n c_0} \log X - \sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} \frac{(n-\nu) c_\nu}{n c_0} \int \frac{x^{n-\nu-1} \partial x}{X}.$$

B. $$\int \frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = \frac{1}{c_n} \int \frac{\partial x}{x^m X^\mu} - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{c_{n-\nu}}{c_n} \int \frac{\partial x}{x^{m-\nu} X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = -\frac{1}{(m-1) c_n x^{m-1} X^\mu} - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{\nu\mu + m - 1}{m-1} \cdot \frac{c_{n-\nu}}{c_n} \int \frac{\partial x}{x^{m-\nu} X^{\mu+1}}.$$

C. $$\int \frac{\partial x}{(x-a)^m X^{\mu+1}} = -\frac{1}{(m-1) f(a) (x-a)^{m-1} X^\mu}$$

$$- \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{\nu\mu + m - 1}{\nu!(m-1)} \cdot \frac{f^\nu(a)}{f(a)} \int \frac{\partial x}{(x-a)^{m-\nu} X^{\mu+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{(x-a)^2 X^{\mu+1}} = -\frac{1}{f(a)(x-a) X^\mu} - (\mu+1) \frac{f'(a)}{f(a)} \int \frac{\partial x}{(x-a) X^{\mu+1}}$$

$$- \sum_{\nu=2}^{\nu=n} \frac{\nu\mu + 1}{\nu!} \cdot \frac{f^\nu(a)}{f(a)} \int \frac{(x-a)^{\nu-2} \partial x}{X^{\mu+1}}.$$

Tafel LXXIV. Fortsetzung.

$$X = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_{n-1} x + c_n = f(x).$$

$$\frac{\partial^\nu X}{\partial x^\nu} = f^\nu(x).$$

r eine Wurzel der Gleichung $X = 0$, oder $f(r) = 0$.

D. $$\int \frac{\partial x}{(x-r)^m X^{\mu+1}} = -\frac{1}{(\mu+m)f'(r)}\left[\frac{1}{(x-r)^m X^\mu} + \sum_{\nu=2}^{\nu=n} \frac{\nu\mu+m}{\nu!} f^\nu(r) \int \frac{\partial x}{(x-r)^{m-\nu+1} X^{\mu+1}}\right].$$

$$\int \frac{\partial x}{(x-r) X^{\mu+1}} = -\frac{1}{(\mu+1)f'(r)}\left[\frac{1}{(x-r) X^\mu} + \sum_{\nu=2}^{\nu=n} \frac{\nu\mu+1}{\nu!} f^\nu(r) \int \frac{(x-r)^{\nu-2}\partial x}{X^{\mu+1}}\right].$$

$$\int \frac{\partial x}{(x-r)^2 X^{\mu+1}} = -\frac{1}{(\mu+2)f'(r)}\left[\frac{1}{(x-r)^2 X^\mu} + (\mu+1)f''(r)\int \frac{\partial x}{(x-r) X^{\mu+1}} + \sum_{\nu=3}^{\nu=n} \frac{\nu\mu+2}{\nu!} f^\nu(r) \int \frac{(x-r)^{\nu-3}\partial x}{X^{\mu+1}}\right].$$

Die Formel C folgt aus B durch Einsetzung von $x - a$ für x, und von $f(a)$ für c_n, $f'(a)$ für c_{n-1}, $\frac{1}{2}f''(a)$ für c_{n-2}, allgemein $\frac{1}{\nu!} f^\nu(a)$ für $c_{n-\nu}$.

Die Formel D folgt, indem man C mit $f(a)$ multiplicirt, hierauf $a = r$ oder $f(a) = 0$ setzt und $m+1$ für m schreibt. — Sind noch mit $f(r)$ zugleich mehrere Ableitungen Null, nämlich $f'(r) = 0$, $f''(r) = 0$, $\cdots$ $f^{\lambda-1}(r) = 0$, $f^\lambda(r)$ aber nicht Null, so ergiebt sich folgende Reduction:

$$\int \frac{\partial x}{(x-r)^m X^{\mu+1}} = -\frac{\lambda!}{(\lambda\mu+m+\lambda-1)f^\lambda(r)}\left[\frac{1}{(x-r)^{m+\lambda-1} X^\mu} + \sum_{\nu=\lambda+1}^{\nu=n} \frac{\nu\mu+m+\lambda-1}{\nu!} f^\nu(r) \int \frac{\partial x}{(x-r)^{m+\lambda-\nu} X^{\mu+1}}\right].$$

$$\int \frac{\partial x}{(x-r) X^{\mu+1}} = -\frac{(\lambda-1)!}{(\mu+1)f^\lambda(r)}\left[\frac{1}{(x-r)^\lambda X^\mu} + \sum_{\nu=\lambda+1}^{\nu=n} \frac{\nu\mu+\lambda}{\nu!} f^\nu(r) \int \frac{(x-r)^{\nu-\lambda-1}\partial x}{X^{\mu+1}}\right].$$

Anmerkung. Obgleich die allgemeinen Formeln der ersten Abtheilung zunächst nur von rationalen Functionen gelten, so ist doch die Bedeutung eines grossen Theiles derselben nicht auf ganzzahlige Werthe der Exponenten beschränkt. In wie weit eine Ausdehnung auf gebrochene Exponenten gestattet ist, lässt sich in jedem einzelnen Falle unmittelbar aus der Ansicht der Formel entscheiden.

Zweite Abtheilung.

Integrale irrationaler algebraischer Functionen.

Allgemeiner Satz über die Reduction von $\int\varphi(x)\cdot X^{m+\mu}\partial x$.

Aus der Ansicht der letzten Tafel voriger Abtheilung, wo μ beliebig war, ergiebt sich folgender

Lehrsatz: Das Integral $\int\varphi(x)\cdot X^{m+\mu}\partial x$, in welchem X ein ganzes Polynom in x vom n^{ten} Grade, $\varphi(x)$ eine rationale Function von x bezeichnet, m eine positive oder negative ganze Zahl und μ ein ächter Bruch ist, lässt sich immer zurückführen auf Integrale von folgenden Formen, nämlich:

$$\int V\cdot X^{\mu}\partial x \quad , \quad \int\frac{X^{\mu}\partial x}{x-a} \quad ,$$

wo V ein ganzes Polynom in x vom $n-2^{ten}$ Grade (höchstens) und die Constante a nicht Wurzel der Gleichung $X=0$ ist.

Beweis. Man zerlege die rationale Function $\varphi(x)\cdot X^{m}$ in ihren ungebrochenen und gebrochenen Theil, diesen aber in einfache Brüche, so zerfällt das vorliegende Integral in Glieder von folgenden Formen;

$$\int x^{k}X^{\mu}\partial x \quad , \quad \int\frac{X^{\mu}\partial x}{(x-a)^{g}} \, ,$$

wo k und g positive ganze Zahlen sind.

Das Integral $\int x^{k}X^{\mu}\partial x$ lässt sich, wenn $k > n-2$, nach Abtheilung A. der Tafel LXXIV auf $\int VX^{\mu}\partial x$ bringen, wo V ein ganzes Polynom vom $n-2^{ten}$ Grade.

Das Integral $\int\frac{X^{\mu}\partial x}{(x-a)^{g}}$ kommt zurück, wenn a nicht Wurzel von $X=0$, also f(a) nicht Null ist, nach Abtheilung C. auf $\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x-a}$ und $\int VX^{\mu}\partial x$; wenn aber $f(a)=0$, nach Abth. D. auf $\int VX^{\mu}\partial x$, wo überall V ein ganzes Polynom ist, dessen Grad den $n-2^{ten}$ nicht übersteigt. W. z. b. w.

Tafel I.

$$X = a + bx.$$

---

m eine positive ganze Zahl, μ ein beliebiger Bruch.

Reductionen. $$\int x^m X^\mu \partial x = \frac{x^m X^{\mu+1}}{(m+\mu+1)b} - \frac{ma}{(m+\mu+1)b}\int x^{m-1}X^\mu \partial x.$$

$$\int \frac{x^m \partial x}{X^{\mu+1}} = \frac{x^{m+1}}{\mu a X^\mu} + \frac{\mu - m - 1}{\mu a}\int \frac{x^m \partial x}{X^\mu}.$$

$$\int x^m X^\mu \partial x = \frac{X^{\mu+1}}{b^{m+1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{(-1)^\nu m_\nu a^\nu X^{m-\nu}}{m+\mu+1-\nu} = \frac{X^{\mu+1}}{(m+\mu+1)b} \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{(-1)^\nu m_\nu a^\nu x^{m-\nu}}{(m+\mu)_\nu b^\nu}.$$

$$\int X^\mu \partial x = \frac{X^{\mu+1}}{(\mu+1)b}.$$

$$\int x X^\mu \partial x = \frac{X^{\mu+1}}{b^2}\left[\frac{X}{\mu+2} - \frac{a}{\mu+1}\right] = \frac{X^{\mu+1}}{(\mu+2)b}\left(x - \frac{a}{(\mu+1)b}\right).$$

$$\int x^2 X^\mu \partial x = \frac{X^{\mu+1}}{b^3}\left[\frac{X^2}{\mu+3} - \frac{2aX}{\mu+2} + \frac{a^2}{\mu+1}\right]$$

$$= \frac{X^{\mu+1}}{(\mu+3)b}\left[x^2 - \frac{2ax}{(\mu+2)b} + \frac{2a^2}{(\mu+1)(\mu+2)b^2}\right].$$

$$\int x^3 X^\mu \partial x = \frac{X^{\mu+1}}{b^4}\left[\frac{X^3}{\mu+4} - \frac{3aX^2}{\mu+3} + \frac{3a^2X}{\mu+2} - \frac{a^3}{\mu+1}\right]$$

$$= \frac{X^{\mu+1}}{(\mu+4)b}\left[x^3 - \frac{3ax^2}{(\mu+3)b} + \frac{6a^2x}{(\mu+2)(\mu+3)b^2} - \frac{6a^3}{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)b^3}\right].$$

$$\int x^4 X^\mu \partial x = \frac{X^{\mu+1}}{b^5}\left[\frac{X^4}{\mu+5} - \frac{4aX^3}{\mu+4} + \frac{6a^2X^2}{\mu+3} - \frac{4a^3X}{\mu+2} + \frac{a^4}{\mu+1}\right].$$

$$\int x^5 X^\mu \partial x = \frac{X^{\mu+1}}{b^6}\left[\frac{X^5}{\mu+6} - \frac{5aX^4}{\mu+5} + \frac{10a^2X^3}{\mu+4} - \frac{10a^3X^2}{\mu+3} + \frac{5a^4X}{\mu+2} - \frac{a^5}{\mu+1}\right].$$

$$\int x^6 X^\mu \partial x = \frac{X^{\mu+1}}{b^7}\left[\frac{X^6}{\mu+7} - \frac{6aX^5}{\mu+6} + \frac{15a^2X^4}{\mu+5} - \frac{20a^3X^3}{\mu+4} + \frac{15a^4X^2}{\mu+3} - \frac{6a^5X}{\mu+2} + \frac{a^6}{\mu+1}\right].$$

Tafel II.

$$X = a + bx.$$

m eine positive ganze Zahl, μ ein beliebiger Bruch.

Reductionen.
$$\int \frac{X^{\mu}\partial x}{x^m} = -\frac{X^{\mu+1}}{(m-1)ax^{m-1}} + \frac{\mu-m+2}{m-1}\cdot\frac{b}{a}\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x^{m-1}}.$$
$$\int\frac{\partial x}{x^m X^{\mu+1}} = \frac{1}{\mu a x^{m-1} X^{\mu}} + \frac{\mu+m-1}{\mu a}\int\frac{\partial x}{x^m X^{\mu}}.$$

Es sei $\mu = \pm\frac{p}{q}$, p und q positive ganze Zahlen. Setzt man

$$y = X^{\frac{1}{q}}, \text{ so wird}$$

$$\int\frac{X^{\frac{p}{q}}\partial x}{x} = q\int\frac{y^{p+q-1}\partial y}{y^q - a} \quad ; \quad \int\frac{\partial x}{xX^{\frac{p}{q}}} = q\int\frac{y^{q-p-1}\partial y}{y^q - a}.$$

$$\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x^m} = -\frac{X^{\mu+1}}{(m-1)a}\sum_{\nu=0}^{\nu=m-2}\frac{(\mu-m+\nu+1)_{\nu}b^{\nu}}{(m-2)_{\nu}a^{\nu}x^{m-\nu-1}} + \frac{\mu_{m-1}b^{m-1}}{a^{m-1}}\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x}.$$

$$\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x^2} = -\frac{X^{\mu+1}}{ax} + \frac{\mu b}{a}\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x}.$$
$$\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x^3} = -\frac{X^{\mu+1}}{2a}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{(\mu-1)b}{ax}\right) + \frac{\mu_2 b^2}{a^2}\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x}.$$
$$\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x^4} = -\frac{X^{\mu+1}}{3a}\left(\frac{1}{x^3} + \frac{(\mu-2)b}{2ax^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-2)b^2}{2a^2x}\right) + \frac{\mu_3 b^3}{a^3}\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x}.$$

Reductionen.

n eine positive ganze Zahl.

$$\int\frac{X^{\mu+n}\partial x}{x} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{a^{\nu}X^{\mu+n-\nu}}{\mu+n-\nu} + a^n\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x}.$$
$$\int\frac{X^{\mu+1}\partial x}{x} = \frac{X^{\mu+1}}{\mu+1} + a\int\frac{X^{\mu}\partial x}{x}.$$
$$\int\frac{\partial x}{xX^{\mu+n}} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{1}{(\mu+n-\nu-1)a^{\nu+1}X^{\mu+n-\nu-1}} + \frac{1}{a^n}\int\frac{\partial x}{xX^{\mu}}.$$
$$\int\frac{\partial x}{xX^{\mu+1}} = \frac{1}{\mu a X^{\mu}} + \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{xX^{\mu}}.$$

Tafel III.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{x^m X^n \partial x}{\sqrt{X}} = \frac{2x^m \sqrt{X^n X}}{(2n+2m+1)b} - \frac{2ma}{(2n+2m+1)b} \int \frac{x^{m-1} X^n \partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{x^m X^n \partial x}{\sqrt{\;}} = \frac{2X^n \sqrt{X}}{b^{m+1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{(-1)^\nu m_\nu a^\nu X^{m-\nu}}{2m+2n-2\nu+1} = \frac{2X^n \sqrt{X}}{(2m+2n+1)b} \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{(-1)^\nu m_\nu a^\nu x^{m-\nu}}{(m+n-\frac{1}{2})_\nu b^\nu}.$$

$$\int \frac{X^n \partial x}{\sqrt{X}} = \frac{2X^n \sqrt{X}}{(2n+1)b}.$$

$$\int \frac{x X^n \partial x}{\sqrt{X}} = \frac{2X^n \sqrt{X}}{b^2} \left[\frac{X}{2n+3} - \frac{a}{2n+1} \right] = \frac{2X^n \sqrt{X}}{(2n+3)b} \left[x - \frac{2a}{(2n+1)b} \right].$$

$$\int \frac{x^2 X^n \partial x}{\sqrt{X}} = \frac{2X^n \sqrt{X}}{b^3} \left[\frac{X^2}{2n+5} - \frac{2aX}{2n+3} + \frac{a^2}{2n+1} \right]$$

$$= \frac{2X^n \sqrt{X}}{(2n+5)b} \left[x^2 - \frac{4ax}{(2n+3)b} + \frac{8a^2}{(2n+1)(2n+3)b^2} \right].$$

$$\int \frac{x^3 X^n \partial x}{\sqrt{X}} = \frac{2X^n \sqrt{X}}{b^4} \left[\frac{X^3}{2n+7} - \frac{3aX^2}{2n+5} + \frac{3a^2X}{2n+3} - \frac{a^3}{2n+1} \right]$$

$$= \frac{2X^n \sqrt{X}}{(2n+7)b} \left[x^3 - \frac{6ax^2}{(2n+5)b} + \frac{24a^2x}{(2n+3)(2n+5)b^2} - \frac{48a^3}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)b^3} \right].$$

$$\int \frac{x^4 X^n \partial x}{\sqrt{X}} = \frac{2X^n \sqrt{X}}{b^5} \left[\frac{X^4}{2n+9} - \frac{4aX^3}{2n+7} + \frac{6a^2X^2}{2n+5} - \frac{4a^3X}{2n+3} + \frac{a^4}{2n+1} \right].$$

$$\int \frac{x^5 X^n \partial x}{\sqrt{X}} = \frac{2X^n \sqrt{X}}{b^6} \left[\frac{X^5}{2n+11} - \frac{5aX^4}{2n+9} + \frac{10a^2X^3}{2n+7} - \frac{10a^3X^2}{2n+5} + \frac{5a^4X}{2n+3} - \frac{a^5}{2n+1} \right].$$

$$\int \frac{x^6 X^n \partial x}{\sqrt{X}} = \frac{2X^n \sqrt{X}}{b^7} \left[\frac{X^6}{2n+13} - \frac{6aX^5}{2n+11} + \frac{15a^2X^4}{2n+9} - \frac{20a^3X^3}{2n+7} + \frac{15a^4X^2}{2n+5} - \frac{6a^5X}{2n+3} + \frac{a^6}{2n+1} \right].$$

$$\int \frac{x^7 X^n \partial x}{\sqrt{X}} = \frac{2X^n \sqrt{X}}{b^8} \left[\frac{X^7}{2n+15} - \frac{7aX^6}{2n+13} + \frac{21a^2X^5}{2n+11} - \frac{35a^3X^4}{2n+9} + \frac{35a^4X^3}{2n+7} - \frac{21a^5X^2}{2n+5} + \frac{7a^6X}{2n+3} - \frac{a^7}{2n+1} \right].$$

$$\int \frac{x^8 X^n \partial x}{\sqrt{X}} = \frac{2X^n \sqrt{X}}{b^9} \left[\frac{X^8}{2n+17} - \frac{8aX^7}{2n+15} + \frac{28a^2X^6}{2n+13} - \frac{56a^3X^5}{2n+11} + \frac{70a^4X^4}{2n+9} - \frac{56a^5X^3}{2n+7} + \frac{28a^6X^2}{2n+5} - \frac{8a^7X}{2n+3} + \frac{a^8}{2n+1} \right].$$

Tafel IV.

$$X = a + bx.$$

$$\int\frac{x^m\,\partial x}{X^n\sqrt{X}} = \frac{2x^m\sqrt{X}}{(2m-2n+1)bX^n} - \frac{2ma}{(2m-2n+1)b}\int\frac{x^{m-1}\,\partial x}{X^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{x^m\,\partial x}{X^n\sqrt{X}} = \frac{2\sqrt{X}}{b^{m+1}X^n}\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\frac{(-1)^\nu m_\nu a^\nu X^{m-\nu}}{2m-2n-2\nu+1} = \frac{2\sqrt{X}}{(2m-2n+1)bX^n}\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\frac{(-1)^\nu m_\nu a^\nu x^{m-\nu}}{(m-n-\frac{1}{2})_\nu b^\nu}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^n\sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{(2n-1)bX^n}.$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{X^n\sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{b^2X^n}\left[\frac{X}{2n-3} - \frac{a}{2n-1}\right] = -\frac{2\sqrt{X}}{(2n-3)bX^n}\left[x + \frac{2a}{(2n-1)b}\right].$$

$$\int\frac{x^2\,\partial x}{X^n\sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{b^3X^n}\left[\frac{X^2}{2n-5} - \frac{2aX}{2n-3} + \frac{a^2}{2n-1}\right]$$

$$= -\frac{2\sqrt{X}}{(2n-5)bX^n}\left[x^2 + \frac{4ax}{(2n-3)b} + \frac{4a^2}{(2n-1)(2n-3)b^2}\right].$$

$$\int\frac{x^3\,\partial x}{X^n\sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{b^4X^n}\left[\frac{X^3}{2n-7} - \frac{3aX^2}{2n-5} + \frac{3a^2X}{2n-3} - \frac{a^3}{2n-1}\right].$$

$$\int\frac{x^4\,\partial x}{X^n\sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{b^5X^n}\left[\frac{X^4}{2n-9} - \frac{4aX^3}{2n-7} + \frac{6a^2X^2}{2n-5} - \frac{4a^3X}{2n-3} + \frac{a^4}{2n-1}\right].$$

$$\int\frac{x^5\,\partial x}{X^n\sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{b^6X^n}\left[\frac{X^5}{2n-11} - \frac{5aX^4}{2n-9} + \frac{10a^2X^3}{2n-7} - \frac{10a^3X^2}{2n-5} + \frac{5a^4X}{2n-3} - \frac{a^5}{2n-1}\right].$$

$$\int\frac{x^6\,\partial x}{X^n\sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{b^7X^n}\left[\frac{X^6}{2n-13} - \frac{6aX^5}{2n-11} + \frac{15a^2X^4}{2n-9} - \frac{20a^3X^3}{2n-7} + \frac{15a^4X^2}{2n-5}\right.$$
$$\left. - \frac{6a^5X}{2n-3} + \frac{a^6}{2n-1}\right].$$

$$\int\frac{x^7\,\partial x}{X^n\sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{b^8X^n}\left[\frac{X^7}{2n-15} - \frac{7aX^6}{2n-13} + \frac{21a^2X^5}{2n-11} - \frac{35a^3X^4}{2n-9} + \frac{35a^4X^3}{2n-7}\right.$$
$$\left. - \frac{21a^5X^2}{2n-5} + \frac{7a^6X}{2n-3} - \frac{a^7}{2n-1}\right].$$

$$\int\frac{x^8\,\partial x}{X^n\sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{b^9X^n}\left[\frac{X^8}{2n-17} - \frac{8aX^7}{2n-15} + \frac{28a^2X^6}{2n-13} - \frac{56a^3X^5}{2n-11} + \frac{70a^4X^4}{2n-9}\right.$$
$$\left. - \frac{56a^5X^3}{2n-7} + \frac{28a^6X^2}{2n-5} - \frac{8a^7X}{2n-3} + \frac{a^8}{2n-1}\right].$$

Tafel V.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{X} - \sqrt{a}}{\sqrt{X} + \sqrt{a}}, \quad \text{wenn a positiv;}$$

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{Arc.Tang} \sqrt{\frac{X}{-a}}, \quad \text{wenn a negativ ist.}$$

$$\int \frac{X^n \partial x}{x\sqrt{X}} = \frac{2X^n}{(2n-1)\sqrt{X}} + a\int \frac{X^{n-1}\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^n \partial x}{x\sqrt{X}} = \frac{2}{\sqrt{X}} \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{a^\nu X^{n-\nu}}{2n-2\nu-1} + a^n \int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\sqrt{X}\partial x}{x} = 2\sqrt{X} + a\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X\sqrt{X}\partial x}{x} = 2\sqrt{X}\left[\frac{X}{3} + a\right] + a^2 \int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^2\sqrt{X}\partial x}{x} = 2\sqrt{X}\left[\frac{X^2}{5} + \frac{aX}{3} + a^2\right] + a^3 \int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^3\sqrt{X}\partial x}{x} = 2\sqrt{X}\left[\frac{X^3}{7} + \frac{aX^2}{5} + \frac{a^2X}{3} + a^3\right] + a^4 \int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^4\sqrt{X}\partial x}{x} = 2\sqrt{X}\left[\frac{X^4}{9} + \frac{aX^3}{7} + \frac{a^2X^2}{5} + \frac{a^3X}{3} + a^4\right] + a^5 \int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^5\sqrt{X}\partial x}{x} = 2\sqrt{X}\left[\frac{X^5}{11} + \frac{aX^4}{9} + \frac{a^2X^3}{7} + \frac{a^3X^2}{5} + \frac{a^4X}{3} + a^5\right] + a^6 \int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^6\sqrt{X}\partial x}{x} = 2\sqrt{X}\left[\frac{X^6}{13} + \frac{aX^5}{11} + \frac{a^2X^4}{9} + \frac{a^3X^3}{7} + \frac{a^4X^2}{5} + \frac{a^5X}{3} + a^6\right] + a^7 \int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^7\sqrt{X}\partial x}{x} = 2\sqrt{X}\left[\frac{X^7}{15} + \frac{aX^6}{13} + \frac{a^2X^5}{11} + \frac{a^3X^4}{9} + \frac{a^4X^3}{7} + \frac{a^5X^2}{5} + \frac{a^6X}{3} + a^7\right] + a^8 \int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^8\sqrt{X}\partial x}{x} = 2\sqrt{X}\left[\frac{X^8}{17} + \frac{aX^7}{15} + \frac{a^2X^6}{13} + \frac{a^3X^5}{11} + \frac{a^4X^4}{9} + \frac{a^5X^3}{7} + \frac{a^6X^2}{5} + \frac{a^7X}{3} + a^8\right] + a^9 \int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

Tafel VI.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}} = \frac{2}{(2n-1)aX^{n-1}\sqrt{X}} + \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{xX^{n-1}\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}} = \frac{2}{a\sqrt{X}}\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{1}{(2n-2\nu-1)a^\nu X^{n-\nu-1}} + \frac{1}{a^n}\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX\sqrt{X}} = \frac{2}{a\sqrt{X}} + \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^2\sqrt{X}} = \frac{2}{a\sqrt{X}}\left[\frac{1}{3X} + \frac{1}{a}\right] + \frac{1}{a^2}\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^3\sqrt{X}} = \frac{2}{a\sqrt{X}}\left[\frac{1}{5X^2} + \frac{1}{3aX} + \frac{1}{a^2}\right] + \frac{1}{a^3}\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^4\sqrt{X}} = \frac{2}{a\sqrt{X}}\left[\frac{1}{7X^3} + \frac{1}{5aX^2} + \frac{1}{3a^2X} + \frac{1}{a^3}\right] + \frac{1}{a^4}\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^5\sqrt{X}} = \frac{2}{a\sqrt{X}}\left[\frac{1}{9X^4} + \frac{1}{7aX^3} + \frac{1}{5a^2X^2} + \frac{1}{3a^3X} + \frac{1}{a^4}\right] + \frac{1}{a^5}\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^6\sqrt{X}} = \frac{2}{a\sqrt{X}}\left[\frac{1}{11X^5} + \frac{1}{9aX^4} + \frac{1}{7a^2X^3} + \frac{1}{5a^3X^2} + \frac{1}{3a^4X} + \frac{1}{a^5}\right] + \frac{1}{a^6}\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^7\sqrt{X}} = \frac{2}{a\sqrt{X}}\left[\frac{1}{13X^6} + \frac{1}{11aX^5} + \frac{1}{9a^2X^4} + \frac{1}{7a^3X^3} + \frac{1}{5a^4X^2} + \frac{1}{3a^5X} + \frac{1}{a^6}\right] + \frac{1}{a^7}\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^8\sqrt{X}} = \frac{2}{a\sqrt{X}}\left[\frac{1}{15X^7} + \frac{1}{13aX^6} + \frac{1}{11a^2X^5} + \frac{1}{9a^3X^4} + \frac{1}{7a^4X^3} + \frac{1}{5a^5X^2} + \frac{1}{3a^6X} + \frac{1}{a^7}\right] + \frac{1}{a^8}\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

Tafel VII.

$$X = a + bx.$$

$$\int\frac{X^n\partial x}{x^m\sqrt{X}} = -\frac{X^n\sqrt{X}}{(m-1)ax^{m-1}} + \frac{2n-2m+3}{2(m-1)}\cdot\frac{b}{a}\int\frac{X^n\partial x}{x^{m-1}\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{X^n\partial x}{x^m\sqrt{X}} = -\frac{X^n\sqrt{X}}{(m-1)a}\sum_{\nu=0}^{\nu=m-2}\frac{(n+\nu-m+\frac{1}{2})_\nu b^\nu}{(m-2)_\nu a^\nu x^{m-\nu-1}} + \frac{(n-\frac{1}{2})_{m-1}b^{m-1}}{a^{m-1}}\int\frac{X^n\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{X^n\partial x}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{X^n\sqrt{X}}{ax} + \frac{(2n-1)b}{2a}\int\frac{X^n\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{X^n\partial x}{x^3\sqrt{X}} = -\frac{X^n\sqrt{X}}{2ax}\left[\frac{1}{x} + \frac{(2n-3)b}{2a}\right] + \frac{(2n-1)(2n-3)b^2}{2\cdot 4a^2}\int\frac{X^n\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{X^n\partial x}{x^4\partial x} = -\frac{X^n\sqrt{X}}{3ax}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{(2n-5)b}{2\cdot 2ax} + \frac{(2n-3)(2n-5)b^2}{2\cdot 4\cdot a^2}\right]$$
$$+ \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)b^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot a^3}\int\frac{X^n\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{X^n\partial x}{x^5\sqrt{X}} = -\frac{X^n\sqrt{X}}{4ax}\left[\frac{1}{x^3} + \frac{(2n-7)b}{2\cdot 3ax^2} + \frac{(2n-5)(2n-7)b^2}{2\cdot 4\cdot 3a^2x}\right.$$
$$\left. + \frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)b^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot a^3}\right]$$
$$+ \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)b^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot a^4}\int\frac{X^n\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{X^n\partial x}{x^6\sqrt{X}} = -\frac{X^n\sqrt{X}}{5ax}\left[\frac{1}{x^4} + \frac{(2n-9)b}{2\cdot 4ax^3} + \frac{(2n-7)(2n-9)b^2}{2\cdot 4\cdot 6a^2x^2}\right.$$
$$+ \frac{(2n-5)(2n-7)(2n-9)b}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 4a^3x}$$
$$\left. + \frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)(2n-9)b^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot a^4}\right]$$
$$+ \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)(2n-9)b^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot a^5}\int\frac{X^n\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{X^n\partial x}{x^7\sqrt{X}} = -\frac{X^n\sqrt{X}}{6ax}\left[\frac{1}{x^5} + \frac{(2n-11)b}{2\cdot 5ax^4} + \frac{(2n-9)(2n-11)b^2}{2\cdot 4\cdot 10a^2x^3}\right.$$
$$+ \frac{(2n-7)(2n-9)(2n-11)b^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 10a^3x^2}$$
$$+ \frac{(2n-5)(2n-7)(2n-9)(2n-11)b^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 5a^4x}$$
$$\left. + \frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)(2n-9)(2n-11)b^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot a^5}\right]$$
$$+ \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)(2n-9)(2n-11)b^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot a^6}\int\frac{X^n\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

Tafel VIII.

$$X = a + bx.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^m X^n \sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{(m-1)ax^{m-1}X^n} - \frac{(2m+2n-3)b}{2(m-1)a}\int\frac{\partial x}{x^{m-1}X^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^m X^n \sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{(m-1)aX^n}\sum_{\nu=0}^{\nu=m-2}\frac{(-1)^\nu(m+n-\frac{3}{2})_\nu b^\nu}{(m-2)_\nu a^\nu x^{m-\nu-1}}$$
$$+\frac{(-1)^{m-1}(m+n-\frac{3}{2})_{m-1}b^{m-1}}{a^{m-1}}\int\frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2 X^n \sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{axX^n} - \frac{(2n+1)b}{2a}\int\frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3 X^n \sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{2axX^n}\left[\frac{1}{x} - \frac{(2n+3)b}{2a}\right] + \frac{(2n+1)(2n+3)b^2}{2\cdot 4\cdot a^2}\int\frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^4 X^n \sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{3axX^n}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{(2n+5)b}{2\cdot 2ax} + \frac{(2n+3)(2n+5)}{2\cdot 4\cdot a^2}\right]$$
$$-\frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)b^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot a^3}\int\frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^5 X^n \sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{4axX^n}\left[\frac{1}{x^3} - \frac{(2n+7)b}{2\cdot 3ax^2} + \frac{(2n+5)(2n+7)b^2}{2\cdot 4\cdot 3a^2x}\right.$$
$$\left.-\frac{(2n+3)(2n+5)(2n+7)b^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot a^3}\right]$$
$$+\frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)b^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot a^4}\int\frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^6 X^n \sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{5axX^n}\left[\frac{1}{x^4} - \frac{(2n+9)b}{2\cdot 4ax^3} + \frac{(2n+7)(2n+9)b^2}{2\cdot 4\cdot 6a^2x^2}\right.$$
$$\left.-\frac{(2n+5)(2n+7)(2n+9)b^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 4a^3x} + \frac{(2n+3)(2n+5)(2n+7)(2n+9)b^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot a^4}\right]$$
$$-\frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)(2n+9)b^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot a^5}\int\frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^7 X^n \sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{6axX^n}\left[\frac{1}{x^5} - \frac{(2n+11)b}{2\cdot 5ax^4} + \frac{(2n+9)(2n+11)b^2}{2\cdot 4\cdot 10a^2x^3}\right.$$
$$-\frac{(2n+7)(2n+9)(2n+11)b^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 10a^3x^2} + \frac{(2n+5)(2n+7)(2n+9)(2n+11)b^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 5a^4x}$$
$$\left.-\frac{(2n+3)(2n+5)(2n+7)(2n+9)(2n+11)b^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot a^5}\right]$$
$$+\frac{(2n+1)(2n+3)\cdots\cdots(2n+11)b^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot a^6}\int\frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}}.$$

Tafel IX.

$$X = a + bx.$$

$$\int x^m X^{n-\frac{1}{3}} \partial x = \frac{3x^m X^{n+\frac{2}{3}}}{(3m+3n+2)b} - \frac{3ma}{(3m+3n+2)b} \int x^{m-1} X^{n-\frac{1}{3}} \partial x.$$

$$\int x^m X^{n-\frac{1}{3}} \partial x = \frac{3X^{n+\frac{2}{3}}}{b^{m+1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{(-1)^\nu m_\nu a^\nu X^{m-\nu}}{3m+3n-3\nu+2} = \frac{3X^{n+\frac{2}{3}}}{(3m+3n+2)b} \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{(-1)^\nu m_\nu a^\nu x^{m-\nu}}{(m+n-\frac{1}{3})_\nu b^\nu}.$$

$$\int X^{n-\frac{1}{3}} \partial x = \frac{3X^{n+\frac{2}{3}}}{(3n+2)b}.$$

$$\int x X^{n-\frac{1}{3}} \partial x = \frac{3X^{n+\frac{2}{3}}}{b^2}\left[\frac{X}{3n+5} - \frac{a}{3n+2}\right] = \frac{3X^{n+\frac{2}{3}}}{(3n+5)b}\left(x - \frac{3a}{(3n+2)b}\right).$$

$$\int x^2 X^{n-\frac{1}{3}} \partial x = \frac{3X^{n+\frac{2}{3}}}{b^3}\left[\frac{X^2}{3n+8} - \frac{2aX}{3n+5} + \frac{a^2}{3n+2}\right]$$

$$= \frac{3X^{n+\frac{2}{3}}}{(3n+8)b}\left[x^2 - \frac{6ax}{(3n+5)b} + \frac{18a^2}{(3n+2)(3n+5)b^2}\right].$$

$$\int x^m X^{n-\frac{2}{3}} \partial x = \frac{3x^m X^{n+\frac{1}{3}}}{(3m+3n+1)b} - \frac{3ma}{(3m+3n+1)b} \int x^{m-1} X^{n-\frac{2}{3}} \partial x.$$

$$\int x^m X^{n-\frac{2}{3}} \partial x = \frac{3X^{n+\frac{1}{3}}}{b^{m+1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{(-1)^\nu m_\nu a^\nu X^{m-\nu}}{3m+3n-3\nu+1} = \frac{3X^{n+\frac{1}{3}}}{(3m+3n+1)b} \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{(-1)^\nu m_\nu a^\nu x^{m-\nu}}{(m+n-\frac{2}{3})_\nu b^\nu}.$$

$$\int X^{n-\frac{2}{3}} \partial x = \frac{3X^{n+\frac{1}{3}}}{(3n+1)b}.$$

$$\int x X^{n-\frac{2}{3}} \partial x = \frac{3X^{n+\frac{1}{3}}}{b^2}\left[\frac{X}{3n+4} - \frac{a}{3n+1}\right] = \frac{3X^{n+\frac{1}{3}}}{(3n+4)b}\left[x - \frac{3a}{(3n+1)b}\right].$$

$$\int x^2 X^{n-\frac{2}{3}} \partial x = \frac{3X^{n+\frac{1}{3}}}{b^3}\left[\frac{X^2}{3n+7} - \frac{2aX}{3n+4} + \frac{a^2}{3n+1}\right]$$

$$= \frac{3X^{n+\frac{1}{3}}}{(3n+7)b}\left[x^2 - \frac{6ax}{(3n+4)b} + \frac{18a^2}{(3n+1)(3n+4)b^2}\right].$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^{\frac{1}{3}}} = 3\int \frac{y \partial y}{y^3 - a} \text{ für } y = X^{\frac{1}{3}}. \qquad \int \frac{\partial x}{xX^{\frac{2}{3}}} = 3\int \frac{\partial y}{y^3 - a} \text{ für } y = X^{\frac{1}{3}}.$$

Tafel X.

$$X = a + bx.$$

$$\int \frac{X^{n-\frac{1}{3}}\partial x}{x^m} = -\frac{X^{n+\frac{2}{3}}}{(m-1)ax^{m-1}} + \frac{3n-3m+5}{3(m-1)} \cdot \frac{b}{a}\int \frac{X^{n-\frac{1}{3}}\partial x}{x^{m-1}}.$$

$$\int \frac{X^{n-\frac{1}{3}}\partial x}{x^m} = -\frac{X^{n+\frac{2}{3}}}{(m-1)a}\sum_{\nu=0}^{\nu=m-2}\frac{(n-m+\nu+\frac{2}{3})_\nu b^\nu}{(m-2)_\nu a^\nu x^{m-\nu-1}} + (n-\tfrac{1}{3})_{m-1}\frac{b^{m-1}}{a^{m-1}}\int \frac{X^{n-\frac{1}{3}}\partial x}{x}.$$

$$\int \frac{X^{n-\frac{1}{3}}\partial x}{x} = \frac{3X^{n-\frac{1}{3}}}{3n-1} + a\int \frac{X^{n-\frac{4}{3}}\partial x}{x} = \frac{3}{X^{\frac{1}{3}}}\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{a^\nu X^{n-\nu}}{3n-3\nu-1} + a^n\int \frac{\partial x}{x \cdot X^{\frac{1}{3}}}.$$

(s. Taf. IX. unten).

$$\int \frac{X^{n-\frac{1}{3}}\partial x}{x^2} = -\frac{X^{n+\frac{2}{3}}}{ax} + \frac{(3n-1)b}{3a}\int \frac{X^{n-\frac{1}{3}}\partial x}{x}.$$

$$\int \frac{X^{n-\frac{1}{3}}\partial x}{x^3} = -\frac{X^{n+\frac{2}{3}}}{2a}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{(3n-4)b}{3ax}\right) + \frac{(3n-1)(3n-4)b^2}{18a^2}\int \frac{X^{n-\frac{1}{3}}\partial x}{x}.$$

$$\int \frac{X^{n-\frac{2}{3}}\partial x}{x_m} = -\frac{X^{n+\frac{1}{3}}}{(m-1)ax^{m-1}} + \frac{3n-3m+4}{3(m-1)} \cdot \frac{b}{a}\int \frac{X^{n-\frac{2}{3}}\partial x}{x^{m-1}}.$$

$$\int \frac{X^{n-\frac{2}{3}}\partial x}{x^m} = -\frac{X^{n+\frac{1}{3}}}{(m-1)a}\sum_{\nu=0}^{\nu=m-2}\frac{(n-m+\nu+\frac{1}{3})_\nu b^\nu}{(m-2)_\nu a^\nu x^{m-\nu-1}} + (n-\tfrac{2}{3})_{m-1}\frac{b^{m-1}}{a^{m-1}}\int \frac{X^{n-\frac{2}{3}}\partial x}{x}.$$

$$\int \frac{X^{n-\frac{2}{3}}\partial x}{x} = \frac{3X^{n-\frac{2}{3}}}{3n-2} + a\int \frac{X^{n-\frac{5}{3}}\partial x}{x} = \frac{3}{X^{\frac{2}{3}}}\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{a^\nu X^{n-\nu}}{3n-3\nu-2} + a^n\int \frac{\partial x}{x \cdot X^{\frac{2}{3}}}.$$

$$\int \frac{X^{n-\frac{2}{3}}\partial x}{x^2} = -\frac{X^{n+\frac{1}{3}}}{ax} + \frac{(3n-2)b}{3a}\int \frac{X^{n-\frac{2}{3}}\partial x}{x}.$$

$$\int \frac{X^{n-\frac{2}{3}}\partial x}{x^3} = -\frac{X^{n+\frac{1}{3}}}{2a}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{(3n-5)b}{3ax}\right) + \frac{(3n-2)(3n-5)b^2}{18a^2}\int \frac{X^{n-\frac{2}{3}}\partial x}{x}.$$

Tafel XI.

$$X = a + bx + cx^2.$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \log \left(\sqrt{X} + x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}} \right), \quad \text{wenn c positiv ist *).}$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \text{Arc.Sin} \frac{-2cx - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}, \quad \text{wenn c negativ ist.}$$

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \log \left(\frac{\sqrt{X} + \sqrt{a}}{x} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right), \quad \text{wenn a positiv ist.}$$

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \text{Arc.Sin} \frac{bx + 2a}{x\sqrt{b^2 - 4ac}}, \quad \text{wenn a negativ ist.}$$

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{bx}, \quad \text{wenn } a = 0 \text{ ist.}$$

Bez. $A = a - bh + ch^2$; $B = b - 2ch$.

$$\int \frac{\partial x}{(x+h)\sqrt{X}} = -\frac{1}{\sqrt{A}} \log \left(\frac{\sqrt{X} + \sqrt{A}}{x+h} + \frac{B}{2\sqrt{A}} \right), \quad \text{wenn A positiv ist.}$$

$$\int \frac{\partial x}{(x+h)\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{-A}} \text{Arc.Sin} \frac{B(x+h) + 2A}{(x+h)\sqrt{b^2 - 4ac}}, \quad \text{wenn A negativ ist.}$$

$$\int \frac{\partial x}{(x+h)\sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{B(x+h)}, \quad \text{wenn } A = 0 \text{ ist.}$$

---

*) Diese Formel verwandelt sich in $\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \,\text{Arc.Sin} \frac{2cx + b}{\sqrt{4ac - b^2}}$, wenn mit c zugleich auch $4ac - b^2$ positiv ist,

hingegen in $\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \,\text{Arc.Cos} \frac{2cx + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}$, wenn c positiv, $4ac - b^2$ negativ ist.

Tafel XI. Fortsetzung.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $i = \sqrt{-1}$. $A = a - ch^2 - bhi$. $B = b - 2chi$.

$$\int \frac{\partial x}{(x+hi)\sqrt{X}} = -\frac{1}{\sqrt{A}} \log\left(\frac{\sqrt{X}+\sqrt{A}}{x+hi} + \frac{B}{2\sqrt{A}}\right).$$

Um in dieser Formel den reellen Theil vom imaginären zu trennen, setze man $\sqrt{A} = \alpha + \beta i$, $\frac{B}{2\sqrt{A}} = \gamma + \delta i$, woraus sich für α, β, γ, δ reelle Werthe ergeben; ferner seien M und φ bestimmt durch die Gleichungen:

$$\frac{x\sqrt{X} + \alpha x + \beta h}{x^2 + h^2} + \gamma = M \operatorname{Cos}\varphi, \quad \frac{\beta x - \alpha h - h\sqrt{X}}{x^2 + h^2} + \delta = M \sin\varphi$$

wo M eine positive Grösse vorstellt; so ist

$$\int \frac{\partial x}{(x+hi)\sqrt{X}} = \frac{-\alpha + \beta i}{\alpha^2 + \beta^2} \log M(\operatorname{Cos}\varphi + i \operatorname{Sin}\varphi).$$

$$\int \frac{\partial x}{(x^2+h^2)\sqrt{X}} = \frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)h} (\alpha\varphi - \beta \log M).$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{(x^2+h^2)\sqrt{X}} = \frac{-1}{\alpha^2+\beta^2} (\beta\varphi + \alpha \log M).$$

Anmerkung. Aus der ersten Formel dieser Tafel ergeben sich die ihr folgenden durch Verwandlung; setzt man nämlich für ein negatives c, $\sqrt{X} = \mu \operatorname{Cos}\varphi$, $x\sqrt{-c} - \frac{b}{2\sqrt{-c}} = \mu \operatorname{Sin}\varphi$, so wird $\mu = \sqrt{a - \frac{b^2}{4c}}$ und $\log\left(\sqrt{X} + x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right) = \log\mu + \varphi i$, woraus die zweite Formel hervorgeht. Die dritte und vierte folgen aus der ersten und zweiten durch Vertauschung von x mit $\frac{1}{x}$ und c mit a; die sechste und siebente aus der dritten und vierten durch Vertauschung von x mit x + h, a mit A, b mit B; die neunte aus der sechsten durch Vertauschung von h mit hi.

Fortsetzung von Tafel XI.

Zusätze zu vorstehender Tafel,

enthaltend einige besonders einfache Fälle, welche sich aus derselben ergeben.

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc.}\,\text{Sin}\,x.$$

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{1-x^2}} = -\,\mathfrak{Arc.}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{1}{x}\,.$$

$$\int \frac{\partial x}{(x+h)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{h^2-1}}\,\text{Arc.}\,\text{Sin}\,\frac{1+hx}{x+h}\,, \quad \text{wenn } h^2 > 1.$$

$$\int \frac{\partial x}{(x+h)\sqrt{1-x^2}} = -\,\frac{1}{\sqrt{1-h^2}}\,\mathfrak{Arc.}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{1+hx}{x+h}\,, \quad \text{wenn } h^2 < 1.$$

$$\int \frac{\partial x}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,.$$

$$\int \frac{\partial x}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,.$$

$$\int \frac{\partial x}{(x^2+h^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{h\sqrt{1+h^2}}\,\text{Arc.}\,\text{Tang}\,\frac{x\sqrt{1+h^2}}{h\sqrt{1-x^2}}\,.$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{(x^2+h^2)\sqrt{1-x^2}} = -\,\frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\,\mathfrak{Arc.}\,\mathfrak{Tang}\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+h^2}}\,.$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1+x^2}} = \mathfrak{Arc.}\,\mathfrak{Sin}\,x.$$

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{1+x^2}} = -\,\mathfrak{Arc.}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{x}\,.$$

$$\int \frac{\partial x}{(x+h)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\,\mathfrak{Arc.}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{hx-1}{x+h}\,.$$

$$\int \frac{\partial x}{(x^2+h^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{h\sqrt{h^2-1}}\,\mathfrak{Arc.}\,\mathfrak{Tang}\,\frac{x\sqrt{h^2-1}}{h\sqrt{1+x^2}}\,, \quad \text{wenn } h^2 > 1.$$

$$\int \frac{\partial x}{(x^2+h^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{h\sqrt{1-h^2}}\,\text{Arc.}\,\text{Tang}\,\frac{x\sqrt{1-h^2}}{h\sqrt{1+x^2}}\,, \quad \text{wenn } h^2 < 1.$$

Tafel XI. Fortsetzung.

Noch Zusätze zu voriger Tafel.

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x^2-1}} = \mathfrak{Arc.\ Cos}\, x.$$

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{Arc.Cos}\, \frac{1}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{(x+h)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-h^2}}\, \text{Arc. Cos}\, \frac{1+hx}{x+h}, \quad \text{wenn } h^2 < 1.$$

$$\int \frac{\partial x}{(x+h)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{h^2-1}}\, \mathfrak{Arc.\ Cos}\, \frac{1+hx}{x+h}, \quad \text{wenn } h^2 > 1.$$

$$\int \frac{\partial x}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{(x^2+h^2)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{h\sqrt{1+h^2}}\, \mathfrak{Arc.\ Tang}\, \frac{h\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{1+h^2}}.$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{(x^2+h^2)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\, \text{Arc. Tang}\, \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{1+h^2}}.$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{(x^2+h^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{h^2-1}}\, \text{Arc. Tang}\, \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{h^2-1}}, \quad \text{wenn } h^2 > 1.$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{(x^2+h^2)\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-h^2}}\, \mathfrak{Arc.\ Tang}\, \frac{\sqrt{1-h^2}}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \text{wenn } h^2 < 1.$$

$$\int \frac{\partial x}{(x^2+1)\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{(x^2+1)\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Tafel XII.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $4ac - b^2 = \Delta$. $\frac{4c}{\Delta} = q$.

$$\int \frac{\partial x}{X^n \sqrt{X}} = \frac{2(2cx + b)\sqrt{X}}{(2n-1)\Delta X^n} + \frac{2(n-1)}{2n-1} q \int \frac{\partial x}{X^{n-1}\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^n \sqrt{X}} = \frac{2(2cx + b)\sqrt{X}}{(2n-1)\Delta} \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{(n-1)_\nu}{(n-\frac{3}{2})_\nu} \cdot \frac{q^\nu}{X^{n-\nu}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}}$$ s. Taf. VIII.

$$\int \frac{\partial x}{X\sqrt{X}} = \frac{2(2cx + b)}{\Delta\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{X^2\sqrt{X}} = \frac{2(2cx + b)}{3\Delta\sqrt{X}}\left[\frac{1}{X} + 2q\right].$$

$$\int \frac{\partial x}{X^3\sqrt{X}} = \frac{2(2cx + b)}{5\Delta\sqrt{X}}\left[\frac{1}{X^2} + \frac{4q}{3X} + \frac{8q^2}{3}\right].$$

$$\int \frac{\partial x}{X^4\sqrt{X}} = \frac{2(2cx + b)}{7\Delta\sqrt{X}}\left[\frac{1}{X^3} + \frac{6q}{5X^2} + \frac{8q^2}{5X} + \frac{16q^3}{5}\right].$$

$$\int \frac{\partial x}{X^5\sqrt{X}} = \frac{2(2cx + b)}{9\Delta\sqrt{X}}\left[\frac{1}{X^4} + \frac{8q}{7X^3} + \frac{48q^2}{35X^2} + \frac{64q^3}{35X} + \frac{128q^4}{35}\right].$$

$$\int \frac{\partial x}{X^6\sqrt{X}} = \frac{2(2cx + b)}{11\Delta\sqrt{X}}\left[\frac{1}{X^5} + \frac{10q}{9X^4} + \frac{80q^2}{63X^3} + \frac{32q^3}{21X^2} + \frac{128q^4}{63X} + \frac{256q^5}{63}\right].$$

$$\int \frac{\partial x}{X^7\sqrt{X}} = \frac{2(2cx + b)}{13\Delta\sqrt{X}}\left[\frac{1}{X^6} + \frac{12q}{11X^5} + \frac{40q^2}{33X^4} + \frac{320q^3}{231X^3} + \frac{128q^4}{77X^2} + \frac{512q^5}{231X} + \frac{1024q^6}{231}\right].$$

Tafel XIII.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $4ac - b^2 = \Delta$, $\frac{4c}{\Delta} = q$.

$$\int X^n\sqrt{X}\cdot\partial x = \frac{(2cx+b)X^n\sqrt{X}}{4(n+1)c} + \frac{2n+1}{2(n+1)q}\int\frac{X^n\,\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int X^n\sqrt{X}\cdot\partial x = \frac{(2cx+b)X^n\sqrt{X}}{4(n+1)c}\sum_{\nu=0}^{\nu=n}\frac{(n+\frac{1}{2})_\nu}{n_\nu}\cdot\frac{1}{q^\nu X^\nu} + \frac{(n+\frac{1}{2})_{n+1}}{q^{n+1}}\int\frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int\sqrt{X}\cdot\partial x = \frac{(2cx+b)\sqrt{X}}{4c} + \frac{1}{2q}\int\frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int X\sqrt{X}\cdot\partial x = \frac{(2cx+b)\sqrt{X}}{8c}\left(X + \frac{3}{2q}\right) + \frac{3}{8q^2}\int\frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int X^2\sqrt{X}\cdot\partial x = \frac{(2cx+b)\sqrt{X}}{12c}\left(X^2 + \frac{5X}{4q} + \frac{15}{8q^2}\right) + \frac{5}{16q^3}\int\frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int X^3\sqrt{X}\cdot\partial x = \frac{(2cx+b)\sqrt{X}}{16c}\left(X^3 + \frac{7X^2}{6q} + \frac{35X}{24q^2} + \frac{35}{16q^3}\right) + \frac{35}{128q^4}\int\frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int X^4\sqrt{X}\cdot\partial x = \frac{(2cx+b)\sqrt{X}}{20c}\left(X^4 + \frac{9X^3}{8q} + \frac{21X^2}{16q^2} + \frac{105X}{64q^3} + \frac{315}{128q^4}\right) + \frac{63}{256q^5}\int\frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int X^5\sqrt{X}\cdot\partial x = \frac{(2cx+b)\sqrt{X}}{24c}\left(X^5 + \frac{11X^4}{10q} + \frac{99X^3}{80q^2} + \frac{231X^2}{160q^3} + \frac{231X}{128q^4} + \frac{693}{256q^5}\right) + \frac{231}{1024q^6}\int\frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

Einige besondere Fälle sind: $\int\partial x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\mathrm{Arc.\,Sin}\,x.$

$\int\partial x\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\mathfrak{Arc.\,Sin}\,x.$ $\int\partial x\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\mathfrak{Arc.\,Cos}\,x.$

Tafel XIV.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $4ac - b^2 = \Delta.$ $\frac{4c}{\Delta} = q.$

$$\int \frac{x\partial x}{X^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{(2n-1)cX^n} - \frac{b}{2c}\int \frac{\partial x}{X^n\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{X^n\sqrt{X}} = -\frac{2(bx+2a)\sqrt{X}}{(2n-1)\Delta X^n} - \frac{b(2cx+b)\sqrt{X}}{(2n-1)c\Delta}\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} \frac{(n-1)_\nu}{(n-\frac{3}{2})_\nu}\cdot\frac{q^\nu}{X^{n-\nu}}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{c} - \frac{b}{2c}\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{X\sqrt{X}} = -\frac{2(bx+2a)}{\Delta\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{X^2\sqrt{X}} = -\frac{2(bx+2a)}{3\Delta X\sqrt{X}} - \frac{8b(2cx+b)}{3\Delta^2\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{X^3\sqrt{X}} = -\frac{2(bx+2a)}{5\Delta X^2\sqrt{X}} - \frac{16b(2cx+b)}{15\Delta^2\sqrt{X}}\left(\frac{1}{X} + 2q\right).$$

$$\int \frac{x\partial x}{X^4\sqrt{X}} = -\frac{2(bx+2a)}{7\Delta X^3\sqrt{X}} - \frac{8b(2cx+b)}{35\Delta^2\sqrt{X}}\left(\frac{3}{X^2} + \frac{4q}{X} + 8q^2\right).$$

$$\int \frac{x^2\partial x}{X^n\sqrt{X}} = \frac{(2b^2-4ac)x + 2ab}{(2n-1)c\Delta X^{n-1}\sqrt{X}} + \frac{4ac + (2n-3)b^2}{(2n-1)c\Delta}\int \frac{\partial x}{X^{n-1}\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{x^2\partial x}{\sqrt{X}} = \left(\frac{x}{2c} - \frac{3b}{4c^2}\right)\sqrt{X} + \frac{3b^2-4ac}{8c^2}\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{x^2\partial x}{X\sqrt{X}} = \frac{(2b^2-4ac)x + 2ab}{c\Delta\sqrt{X}} + \frac{1}{c}\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{x^2\partial x}{X^2\sqrt{X}} = \frac{(2b^2-4ac)x + 2ab}{3c\Delta X\sqrt{X}} + \frac{2(4ac+b^2)(2cx+b)}{3c\Delta^2\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{x^2\partial x}{X^3\sqrt{X}} = \frac{(2b^2-4ac)x + 2ab}{5c\Delta X^2\sqrt{X}} + \frac{2(4ac+3b^2)(2cx+b)}{15c\Delta^2\sqrt{X}}\left(\frac{1}{X} + \frac{8c}{\Delta}\right).$$

$$\int \frac{x^3\partial x}{X^n\sqrt{X}} = \left(-\frac{x^2}{c} + \frac{2(2n-7)ac-(2n-5)b^2}{(2n-1)c^2\Delta}bx - \frac{8ac+(2n-5)b^2}{(2n-1)c^2\Delta}a\right)\frac{\sqrt{X}}{(2n-3)X^n}$$
$$- \frac{12ac+(2n-5)b^2}{2(2n-1)c^2\Delta}b\int \frac{\partial x}{X^{n-1}\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{x^3\partial x}{\sqrt{X}} = \left(\frac{x^2}{3c} - \frac{5bx}{12c^2} + \frac{5b^2}{8c^3} - \frac{2a}{3c^2}\right)\sqrt{X} + \left(\frac{3ab}{4c^2} - \frac{5b^3}{16c^3}\right)\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{x^3\partial x}{X\sqrt{X}} = \left(\frac{x^2}{c} + \frac{10ac-3b^2}{c^2\Delta}bx + \frac{8ac-3b^2}{c^2\Delta}a\right)\frac{1}{\sqrt{X}} - \frac{12ac-3b^2}{2c^2\Delta}b\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

Tafel XV.

$$X = a + bx + cx^2.$$

$$\int\frac{xX^n\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{X^n\sqrt{X}}{(2n+1)c} - \frac{b}{2c}\int\frac{X^n\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int x\partial x\sqrt{X} = \frac{X\sqrt{X}}{3c} - \frac{b}{2c}\int\partial x\sqrt{X}. \quad \int xX\sqrt{X}\cdot\partial x = \frac{X^2\sqrt{X}}{5c} - \frac{b}{2c}\int X\sqrt{X}\cdot\partial x.$$

$$\int\frac{x^2X^n\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{xX^n\sqrt{X}}{2(n+1)c} - \frac{2n+3}{2(n+1)}\cdot\frac{b}{2c}\int\frac{xX^n\partial x}{\sqrt{X}} - \frac{a}{2(n+1)c}\int\frac{X^n\partial x}{\sqrt{X}}$$

$$\int\frac{x^2X^n\partial x}{\sqrt{X}} = \left(x - \frac{(2n+3)b}{2(2n+1)c}\right)\frac{X^n\sqrt{X}}{2(n+1)c} + \frac{(2n+3)b^2 - 4ac}{8(n+1)c^2}\int\frac{X^n\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int x^2\sqrt{X}\cdot\partial x = \left(x - \frac{5b}{6c}\right)\frac{X\sqrt{X}}{4c} + \frac{5b^2 - 4ac}{16c^2}\int\sqrt{X}\cdot\partial x.$$

$$\int x^2X\sqrt{X}\cdot\partial x = \left(x - \frac{7b}{10c}\right)\frac{X^2\sqrt{X}}{6c} + \frac{7b^2 - 4ac}{24c^2}\int X\sqrt{X}\cdot\partial x.$$

$$\int x^2X^2\sqrt{X}\cdot\partial x = \left(x - \frac{9b}{14c}\right)\frac{X^3\sqrt{X}}{8c} + \frac{9b^2 - 4ac}{32c^2}\int X^2\sqrt{X}\cdot\partial x. \quad \text{(S. Taf. X.)}$$

$$\int\frac{x^3X^n\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{x^2X^n\sqrt{X}}{(2n+3)c} - \frac{(2n+5)b}{2(2n+3)c}\int\frac{x^2X^n\partial x}{\sqrt{X}} - \frac{2a}{(2n+3)c}\int\frac{xX^n\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{x^3X^n\partial x}{\sqrt{X}} = \left(x^2 - \frac{(2n+5)bx}{4(n+1)c} + \frac{(2n+3)(2n+5)b^2}{8(2n+1)(n+1)c^2} - \frac{2a}{(2n+1)c}\right)\frac{X^n\sqrt{X}}{(2n+3)c}$$

$$+ \left(\frac{3ab}{4(n+1)c^2} - \frac{(2n+5)b^3}{16(n+1)c^3}\right)\int\frac{X^n\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int x^3\sqrt{X}\cdot\partial x = \left(x^2 - \frac{7bx}{8c} + \frac{35b^2}{48c^2} - \frac{2a}{3c}\right)\frac{X\sqrt{X}}{5c} + \left(\frac{3ab}{8c^2} - \frac{7b^3}{32c^3}\right)\int\sqrt{X}\cdot\partial x.$$

$$\int x^3X\sqrt{X}\cdot\partial x = \left(x^2 - \frac{3bx}{4c} + \frac{21b^2}{40c^2} - \frac{2a}{5c}\right)\frac{X^2\sqrt{X}}{7c} + \left(\frac{ab}{4c^2} - \frac{3b^3}{16c^3}\right)\int X\sqrt{X}\cdot\partial x.$$

$$\int x^3X^2\sqrt{X}\cdot\partial x = \left(x^2 - \frac{11bx}{16c} + \frac{99b^2}{224c^2} - \frac{2a}{7c}\right)\frac{X^3\sqrt{X}}{9c} + \left(\frac{3ab}{16c^2} - \frac{11b^3}{64c^3}\right)\int X^2\sqrt{X}\cdot\partial x.$$

Tafel XVI.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $4ac - b^2 = \Delta$.

$$\int \frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{(2n-1)aX^n} + \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{xX^{n-1}\sqrt{X}} - \frac{b}{2a}\int \frac{\partial x}{X^n\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX\sqrt{X}} = \frac{4ac - 2b^2 - 2bcx}{a\Delta\sqrt{X}} + \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}, \quad \text{(s. Taf. VIII.)}$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^2\sqrt{X}} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{3X}\right)\frac{1}{a\sqrt{X}} - \left(\frac{1}{3X} + \frac{8c}{3\Delta} + \frac{1}{a}\right)\frac{b(2cx+b)}{a\Delta\sqrt{X}} + \frac{1}{a^2}\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{xX^3\sqrt{X}} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{3aX} + \frac{1}{5X^2}\right)\frac{1}{a\sqrt{X}} - \left[\frac{1}{5X^2} + \left(\frac{16c}{15\Delta} + \frac{1}{3a}\right)\frac{1}{X} + \frac{128c^2}{15\Delta^2} + \frac{8c}{3a\Delta} + \frac{1}{a^2}\right]\frac{b(2cx+b)}{a\Delta\sqrt{X}} + \frac{1}{a^3}\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2X^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{axX^n} - \frac{(2n+1)b}{2a}\int \frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}} - \frac{2nc}{a}\int \frac{\partial x}{X^n\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{ax} - \frac{b}{2a}\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2X\sqrt{X}} = -\frac{4c(2cx+b)}{a\Delta\sqrt{X}} - \frac{1}{ax\sqrt{X}} - \frac{3b}{2a}\int \frac{\partial x}{xX\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2X^2\sqrt{X}} = -\frac{8c(2cx+b)}{3a\Delta\sqrt{X}}\left(\frac{1}{X} + \frac{8c}{\Delta}\right) - \frac{1}{axX\sqrt{X}} - \frac{5b}{2a}\int \frac{\partial x}{xX^2\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2X^3\sqrt{X}} = -\frac{12c(2cx+b)}{5a\Delta\sqrt{X}}\left(\frac{1}{X^2} + \frac{16c}{3\Delta X} + \frac{128c^2}{3\Delta^2}\right) - \frac{1}{axX^2\sqrt{X}} - \frac{7b}{2a}\int \frac{\partial x}{xX^3\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3X^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{2ax^2X^n} - \frac{(2n+3)b}{4a}\int \frac{\partial x}{x^2X^n\sqrt{X}} - \frac{(2n+1)c}{2a}\int \frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3\sqrt{X}} = \left(\frac{3b}{2a} - \frac{1}{x}\right)\frac{\sqrt{X}}{2ax} + \frac{3b^2 - 4ac}{8a^2}\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3X\sqrt{X}} = \left(\frac{5b}{2a} - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{2ax\sqrt{X}} + \frac{5bc(2cx+b)}{a^2\Delta\sqrt{X}} + \frac{3(5b^2 - 4ac)}{8a^2}\int \frac{\partial x}{xX\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3X^2\sqrt{X}} = \left(\frac{7b}{2a} - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{2axX\sqrt{X}} + \frac{14bc(2cx+b)}{3a^2\Delta\sqrt{X}}\left(\frac{1}{X} + \frac{8c}{\Delta}\right) + \frac{5(7b^2 - 4ac)}{8a^2}\int \frac{\partial x}{xX^2\sqrt{X}}.$$

Anmerkung. Wenn $a = 0$ ist, s. Taf. XIX.

Tafel XVII.

$$X = a + bx + cx^2.$$

$$\int \frac{X^n \partial x}{x\sqrt{X}} = \frac{X^n}{(2n-1)\sqrt{X}} + a\int \frac{X^{n-1}\partial x}{x\sqrt{X}} + \frac{b}{2}\int \frac{X^{n-1}\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\sqrt{X}\partial x}{x} = \sqrt{X} + \frac{b}{2}\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}} + a\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X\sqrt{X}\partial x}{x} = \left(\frac{X}{3} + a\right)\sqrt{X} + \frac{b}{2}\int \sqrt{X}\partial x + \frac{ab}{2}\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}} + a^2\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^2\sqrt{X}\partial x}{x} = \left(\frac{X^2}{5} + \frac{aX}{3} + a^2\right)\sqrt{X} + \frac{b}{2}\int X\sqrt{X}\partial x + \frac{ab}{2}\int \sqrt{X}\partial x + \frac{a^2 b}{2}\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}} + a^3\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^n \partial x}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{X^{n-1}\sqrt{X}}{x} + \frac{(2n-1)b}{2}\int \frac{X^{n-1}\partial x}{x\sqrt{X}} + (2n-1)c\int \frac{X^{n-1}\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\sqrt{X}\partial x}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{b}{2}\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}} + c\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X\sqrt{X}\partial x}{x^2} = \left(-\frac{X}{x} + \frac{3b}{2}\right)\sqrt{X} + \frac{3b^2}{4}\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}} + 3c\int \sqrt{X}\partial x + \frac{3ab}{2}\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^2\sqrt{X}\partial x}{x^2} = \left(-\frac{X^2}{x} + \frac{5bX}{6} + \frac{5ab}{2}\right)\sqrt{X} + \frac{5b^2}{4}\int \sqrt{X}\partial x + \frac{5ab^2}{4}\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}} + 5c\int X\sqrt{X}\partial x + \frac{5a^2 b}{2}\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X^n \partial x}{x^3\sqrt{X}} = -\frac{X^{n-1}\sqrt{X}}{2x^2} + \frac{2n-1}{4}b\int \frac{X^{n-1}\partial x}{x^2\sqrt{X}} + \frac{2n-1}{2}c\int \frac{X^{n-1}\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\sqrt{X}\partial x}{x^3} = -\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{b}{4ax}\right)\sqrt{X} + \left(\frac{c}{2} - \frac{b^2}{8a}\right)\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{X\sqrt{X}\partial x}{x^3} = -\left(\frac{X}{2x^2} + \frac{3b}{4x} - \frac{3c}{2}\right)\sqrt{X} + \left(\frac{3b^2}{8} + \frac{3ac}{2}\right)\int \frac{\partial x}{x\sqrt{X}} + \frac{3bc}{2}\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

Tafel XVIII.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Allgemeine Formeln zu Tafel XIV bis XVII.

m und n positive ganze Zahlen.

$$\int\frac{x^m\partial x}{X^n\sqrt{X}} = \frac{1}{c}\int\frac{x^{m-2}\partial x}{X^{n-1}\sqrt{X}} - \frac{b}{c}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{X^n\sqrt{X}} - \frac{a}{c}\int\frac{x^{m-2}\partial x}{X^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{x^m\partial x}{X^n\sqrt{X}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{X}}{(2n-m)cX^n} - \frac{(2n-2m+1)b}{2(2n-m)c}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{X^n\sqrt{X}} + \frac{(m-1)a}{(2n-m)c}\int\frac{x^{m-2}\partial x}{X^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{x^m X^n\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{x^{m-1}X^n\sqrt{X}}{(2n+m)c} - \frac{(2n+2m-1)b}{2(2n+m)c}\int\frac{x^{m-1}X^n\partial x}{\sqrt{X}} - \frac{(m-1)a}{(2n+m)c}\int\frac{x^{m-2}X^n\partial x}{\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^m X^n\sqrt{X}} = \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x^m X^{n-1}\sqrt{X}} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{x^{m-1}X^n\sqrt{X}} - \frac{c}{a}\int\frac{\partial x}{x^{m-2}X^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^m X^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{(m-1)ax^{m-1}X^n} - \frac{(2n+2m-3)b}{2(m-1)a}\int\frac{\partial x}{x^{m-1}X^n\sqrt{X}}$$
$$- \frac{(2n+m-2)c}{(m-1)a}\int\frac{\partial x}{x^{m-2}X^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}} = \frac{1}{a^n\sqrt{X}}\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{a^\nu}{(2\nu+1)X^\nu} - \frac{b}{2a^n}\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}a^\nu\int\frac{\partial x}{X^{\nu+1}\sqrt{X}} + \frac{1}{a^n}\int\frac{\partial x}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{X^n\partial x}{x^m\sqrt{X}} = -\frac{X^n\sqrt{X}}{(m-1)ax^{m-1}} + \frac{(2n-2m+3)b}{2(m-1)a}\int\frac{X^n\partial x}{x^{m-1}\sqrt{X}}$$
$$+ \frac{(2n-m+2)c}{(m-1)a}\int\frac{X^n\partial x}{x^{m-2}\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{X^n\partial x}{x^m\sqrt{X}} = -\frac{X^{n-1}\sqrt{X}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{2n-1}{2(m-1)}b\int\frac{X^{n-1}\partial x}{x^{m-1}\sqrt{X}} + \frac{2n-1}{m-1}c\int\frac{X^{n-1}\partial x}{x^{m-2}\sqrt{X}}.$$

Bez. $A = a - bh + ch^2$, $B = b - 2ch$;
n eine ganze Zahl, positiv oder negativ.

$$\int\frac{X^n\partial x}{(x+h)^m\sqrt{X}} = -\frac{X^n\sqrt{X}}{(m-1)A(x+h)^{m-1}} + \frac{(2n-2m+3)B}{2(m-1)A}\int\frac{X^n\partial x}{(x+h)^{m-1}\sqrt{X}}$$
$$+ \frac{(2n-m+2)c}{(m-1)A}\int\frac{X^n\partial x}{(x+h)^{m-2}\sqrt{X}}.$$

Tafel XVIII. Fortsetzung.

$$X = a + bx + cx^2.$$

---

m eine positive, n eine positive oder negative ganze Zahl.

$$\int \frac{x^m X^n \partial x}{\sqrt{X}} = X^n \sqrt{X} \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \alpha_\nu x^{m-\nu} + \beta \int \frac{X^n \partial x}{\sqrt{X}}.$$

Die Coëfficienten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m, \beta$ werden durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$(2n+m)c\alpha_1 = 1\ ;\ 2(2n+m-1)c\alpha_2 + (2m+2n-1)b\alpha_1 = 0.$$

$$2(2n+m-\nu+1)c\alpha_\nu + (2m+2n-2\nu+3)b\alpha_{\nu-1} + 2(m-\nu+2)a\alpha_{\nu-2}$$
$$= 0, \text{ für } \nu = 3, 4, \cdots m.$$

$$2\beta = -(2n+1)b\alpha_m - 2a\alpha_{m-1}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^m X^n \sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{X^n} \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \frac{\alpha_\nu}{a^\nu x^{m-\nu}} + \beta \int \frac{\partial x}{x X^n \sqrt{X}} + \gamma \int \frac{\partial x}{X^n \sqrt{X}}.$$

Die Coëfficienten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{m-1}, \beta, \gamma$ folgen aus den Gleichungen:

$$(m-1)\alpha_1 + 1 = 0.\quad (m-2)\alpha_2 + (m+n-\tfrac{3}{2})b\alpha_1 = 0.$$

$$2(m-\nu)\alpha_\nu + (2m+2n-2\nu+1)b\alpha_{\nu-1} + 2(m+2n-\nu+1)ac\alpha_{\nu-2}$$
$$= 0, \text{ für } \nu = 3, 4, \cdots m-1.$$

$$\beta = \frac{(2n+1)c\alpha_{m-2}}{a^{m-2}} + \frac{(2n+1)b\alpha_{m-1}}{2a^{m-1}}.$$

$$\gamma = \frac{2nc\alpha_{m-1}}{a^{m-1}}.$$

$$X = bx + cx^2.$$ **Tafel XIX.**

Anmerkung. Die Formeln der Tafel XVI werden unbrauchbar, wenn $a = 0$ ist. Es genügt aber, den Divisor a als Factor auf die linke Seite zu setzen, um für diesen Fall brauchbare Reductionsformeln zu erhalten.

$$\int\frac{\partial x}{x^m X^n\sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{(2n+2m-1)bx^m X^n} - \frac{2(2n+m-1)c}{(2n+2m-1)b}\int\frac{\partial x}{x^{m-1}X^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^n\sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{(2n+1)bxX^n} - \frac{4nc}{(2n+1)b}\int\frac{\partial x}{X^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x\sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{bx}. \qquad \int\frac{\partial x}{xX\sqrt{X}} = -\frac{2}{3bx\sqrt{X}} - \frac{4c}{3b}\int\frac{\partial x}{X\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{xX^2\sqrt{X}} = -\frac{2}{5bxX\sqrt{X}} - \frac{8c}{5b}\int\frac{\partial x}{X^2\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^n\sqrt{X}} = \frac{2\sqrt{X}}{(2n+3)bxX^n}\left(-\frac{1}{x}+\frac{2c}{b}\right) + \frac{8nc^2}{(2n+3)b^2}\int\frac{\partial x}{X^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2\sqrt{X}} = \frac{2\sqrt{X}}{3bx}\left(-\frac{1}{x}+\frac{2c}{b}\right). \qquad \int\frac{\partial x}{x^2X\sqrt{X}} = \frac{2}{5bx\sqrt{X}}\left(-\frac{1}{x}+\frac{2c}{b}\right) + \frac{8c^2}{5b^2}\int\frac{\partial x}{X\sqrt{X}}$$

$$\int\frac{\partial x}{x^2X^2\sqrt{X}} = \frac{2}{7bxX\sqrt{X}}\left(-\frac{1}{x}+\frac{2c}{b}\right) + \frac{16c^2}{7b^2}\int\frac{\partial x}{X^2\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^n\sqrt{X}} = \frac{2\sqrt{X}}{(2n+5)bxX^n}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{4(n+1)c}{(2n+3)bx}-\frac{8(n+1)c^2}{(2n+3)b^2}\right)$$
$$-\frac{32n(n+1)c^3}{(2n+3)(2n+5)b^3}\int\frac{\partial x}{X^n\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3\sqrt{X}} = \frac{2\sqrt{X}}{5bx}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{4c}{3bx}-\frac{8c^2}{3b^2}\right).$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X\sqrt{X}} = \frac{2}{7bx\sqrt{X}}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{8c}{5bx}-\frac{16c^2}{5b^2}\right) - \frac{64c^3}{35b^3}\int\frac{\partial x}{X\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3X^2\sqrt{X}} = \frac{2}{9bxX\sqrt{X}}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{12c}{7bx}-\frac{24c^2}{7b^2}\right) - \frac{64c^3}{21b^3}\int\frac{\partial x}{X^2\sqrt{X}}.$$

Die Integrale $\int\frac{\partial x}{X^n\sqrt{X}} = \int\frac{\partial x}{(bx+cx^2)^{n+\frac{1}{2}}}$ ergeben sich aus Tafel XII, wenn daselbst $a = 0$ gesetzt wird.

Tafel XX.

$$X = a + bx + cx^2.$$

Bez. $i = \sqrt{-1}$; $A = a - ch^2 - bhi$; $B = b - 2chi$.

$$\int \frac{\partial x}{(x+hi)^m \sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{(m-1)A(x+hi)^{m-1}} - \frac{(2m-3)B}{2(m-1)A} \int \frac{\partial x}{(x+hi)^{m-1}\sqrt{X}}$$
$$-\frac{(m-2)c}{(m-1)A} \int \frac{\partial x}{(x+hi)^{m-2}\sqrt{X}}.$$

$\int \frac{\partial x}{(x+hi)\sqrt{X}}$ s. Taf. XI. | $\int \frac{\partial x}{(x+hi)^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{A(x+hi)} - \frac{B}{2A}\int \frac{\partial x}{(x+hi)\sqrt{X}}.$

$$\int \frac{\partial x}{(x+hi)^3\sqrt{X}} = \left(-\frac{1}{2A(x+hi)^2} + \frac{3B}{4A^2(x+hi)}\right)\sqrt{X} + \frac{3B^2 - 4Ac}{8A^2}\int \frac{\partial x}{(x+hi)\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{(x+hi)^4\sqrt{X}} = \left[-\frac{1}{3A(x+hi)^3} + \frac{5B}{12A^2(x+hi)^2} - \left(\frac{5B^2}{8A^3} - \frac{2c}{3A^2}\right)\frac{1}{x+hi}\right]\sqrt{X}$$
$$+\left(\frac{3Bc}{4A^2} - \frac{5B^3}{16A^3}\right)\int \frac{\partial x}{(x+hi)\sqrt{X}}.$$

Trennt man in vorstehenden Formeln den reellen Theil vom imaginären, so ergeben sich Gleichungen von der Form:

$$\int \frac{\partial x}{(x+hi)^m\sqrt{X}} = U_m + V_m i \quad , \quad \int \frac{\partial x}{(x-hi)^m\sqrt{X}} = U_m - V_m i.$$

wo U_m und V_m reelle Functionen von x sind, welche sich aus der Tafel finden lassen. Da nun

$$\frac{1}{(x^2+h^2)^n} = \frac{(-1)^n}{(2h)^n}\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{(n+\nu-1)_\nu}{(2h)^\nu}\left(\frac{(-i)^{n+\nu}}{(x+hi)^{n-\nu}} + \frac{(i)^{n+\nu}}{(x-hi)^{n-\nu}}\right),$$

$$\frac{x}{(x^2+h^2)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2h)^{n-1}}\sum_{\nu=0}^{\nu=n-2}\frac{(n+\nu-2)_{\nu-1}(n-\nu-1)}{2\nu(2h)^\nu}\left(\frac{(-i)^{n+\nu-1}}{(x+hi)^{n-\nu}} + \frac{(i)^{n+\nu-1}}{(x-hi)^{n-\nu}}\right),$$

so erhält man hierdurch die Integrale: $\int \frac{\partial x}{(x^2+h^2)^m\sqrt{X}}$, $\int \frac{x\partial x}{(x^2+h^2)^m\sqrt{X}}$.

$\int \frac{\partial x}{(x^2+h^2)^2\sqrt{X}} = -\frac{1}{2h^2}\left(U_2 + \frac{V_1}{h}\right).$ | $\int \frac{x\partial x}{(x^2+h^2)^2\sqrt{X}} = -\frac{V_2}{2h}.$

$\int \frac{\partial x}{(x^2+h^2)^3\sqrt{X}} = -\frac{1}{4h^3}\left(-V_3 + \frac{3U_2}{2h} + \frac{3V_1}{2h^2}\right).$ | $\int \frac{x\partial x}{(x^2+h^2)^3\sqrt{X}} = -\frac{1}{4h^2}\left(U_3 + \frac{V_2}{2h}\right).$

Tafel XXI.

$$X = a + bx^n.$$

Reductions-Formeln.

$$\int x^{m-1}X^p\partial x = \frac{x^{m-n}X^{p+1} - (m-n)a\int x^{m-n-1}X^p\partial x}{(m+np)b}.$$

$$\int x^{m-1}X^p\partial x = \frac{x^m X^p + npa\int x^{m-1}X^{p-1}\partial x}{m+np}.$$

$$\int x^{m-1}X^p\partial x = \frac{x^m X^{p+1} - (m+np+n)b\int x^{m+n-1}X^p\partial x}{ma}.$$

$$\int x^{m-1}X^p\partial x = \frac{-x^m X^{p+1} + (m+np+n)\int x^{m-1}X^{p+1}\partial x}{(n+np)a}.$$

$$(m+np)(m+np-n)b\int x^{m-1}X^p\partial x + np(m-n)a^2\int x^{m-n-1}X^{p-1}\partial x$$
$$= [npax^{m-n} + (m+pn-n)bx^m]X^p.$$

$$m\int x^{m-1}X^p\partial x + npb\int x^{m+n-1}X^{p-1}\partial x = x^m X^p.$$

$$(np+n)b\int x^{m-1}X^p\partial x + (m-n)\int x^{m-n-1}X^{p+1}\partial x = x^{m-n}X^{p+1}.$$

Anmerkung. Durch die Formeln des ersten Absatzes wird nur einer der Exponenten m,p; durch die des zweiten werden beide zugleich reducirt. Der folgende Absatz enthält Verwandlungen des vorliegenden Integrals durch Substitution. q und r sind ganze Zahlen.

$$\int x^{m-1}X^{\frac{q}{r}}\partial x = \frac{r}{nb^{\frac{m}{n}}}\int (y^r - a)^{\frac{m}{n}-1}y^{q+r-1}\partial y, \text{für } y^r = a + bx^n = X.$$

$$\int x^{m-1}X^{\frac{q}{r}}\partial x = -\frac{r}{n}a^{\frac{m}{n}+\frac{q}{r}}\int\frac{y^{q+r-1}\partial y}{(y^r-b)^{\frac{m}{n}+\frac{q}{r}+1}}, \text{ für } y^r = \frac{a}{x^n} + b.$$

Wenn $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl ist, so führt die erste, und wenn $\frac{m}{n} + \frac{q}{r}$ eine ganze Zahl ist, die zweite Formel auf das Integral einer rationalen Function. Für $q = -m$, $r = n$ giebt die zweite Formel:

$$\int\frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bx^n)^{\frac{m}{n}}} = \int\frac{y^{n-m-1}\partial y}{b - y^n}, \text{ wo } y^n = \frac{a}{x^n} + b; \text{ z. B. für } m = 1:$$

$$\int\frac{\partial x}{(a+bx^n)^{\frac{1}{n}}} = \int\frac{y^{n-2}\partial y}{b-y^n}, \text{ für } y^n = \frac{a}{x^n} + b.$$

Dritte Abtheilung.

Integrale exponentieller und trigonometrischer Functionen.

Integration exponentieller und trigonometrischer Functionen.

Lehrsatz. Bezeichnet $f(e^x)$ eine rationale Function von e^x, so verwandelt sich das Integral $\int f(e^x)\partial x$ durch die Substitution $z = e^x$, $\frac{\partial z}{z} = \partial x$, in $\int f(z)\frac{\partial z}{z}$, also in das Integral einer rationalen Function $\frac{f(z)}{z}$.

Zusatz 1. Das Integral einer rationalen Function von $\operatorname{Sin} x$ und $\operatorname{Cos} x$, nämlich $\int f(\operatorname{Sin} x, \operatorname{Cos} x)\partial x$, lässt sich immer auf die Integration einer rationalen Function zurückführen.

Denn da $\operatorname{Cos} x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$, $\operatorname{Sin} x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$, $(i = \sqrt{-1})$, so verwandelt sich durch die Substitution $e^{xi} = z$, $\partial x = \frac{\partial z}{iz}$, das vorgelegte Integral in $\int \psi(z) \cdot \partial z$ wo ψ eine rationale Function ist.

Zusatz 2. Da jedoch durch vorstehende Substitution das Imaginäre eingemischt wird, so ist in der Regel eine andere Substitution vorzuziehen, nämlich $\operatorname{Tang}(\frac{1}{2}x) = u$, woraus $\operatorname{Sin} x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\operatorname{Cos} x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\partial x = \frac{2\partial u}{1+u^2}$ folgt, durch welche mithin das Integral $\int f(\operatorname{Sin} x, \operatorname{Cos} x)\partial x$ auf die Form $\int \varphi(u)\partial u$ gebracht wird, wo φ eine rationale Function ist, wenn f eine solche ist.

Zusatz 3. Da allgemein $\int x\partial\varphi = x\varphi - \int \varphi \partial x$, so lässt sich nach vorstehendem Lehrsatze auch das Integral $\int x\partial\varphi$ immer finden, wenn φ eine beliebige rationale Function von $\operatorname{Sin} x$ und $\operatorname{Cos} x$ ist.

Anmerkung 1. Der oben aufgestellte Lehrsatz lässt sich noch etwas allgemeiner so ausdrücken: Es sei $y = \sqrt{a + be^x + ce^{2x}}$ und $f(e^x, y)$ eine rationale Function von e^x und y, so verwandelt sich durch die Substitution $z = e^x$ das Integral

$$\int f(e^x, y)\partial x \text{ in } \int f(z, \sqrt{a + bz + cz^2})\frac{\partial z}{z} = \int \varphi(z)\partial z + \int \frac{\psi(z)\partial z}{\sqrt{a + bz + cz^2}}$$

wo φ und ψ rationale Functionen sind. Durch eine passende Substitution lässt sich dieses Integral stets auf die Integration einer rationalen Function zurückführen. Vergleiche Abtheilung 2.

Anmerkung 2. Die folgenden Tafeln enthalten hauptsächlich Integrale rationaler trigonometrischer Functionen, aus welchen sich die Integrale der entsprechenden Exponential- oder hyperbolischen Functionen durch Vertauschung der veränderlichen Grösse x mit xi sofort herleiten lassen; daher die Aufstellung der letzteren als unnöthig unterblieben ist.

Anmerkung 3. Auch andere Substitutionen, wie $\operatorname{Sin} x = y$ oder $\operatorname{Cos} x = y$ führen die Formeln der folgenden Tafeln grösstentheils auf diejenigen der vorhergehenden Abtheilungen zurück und geben zu Vergleichungen Gelegenheit.

Tafel I.

$\int \mathrm{Cos}\, x^n \partial x$.

n eine positive ganze Zahl, n′ die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl; also

$$n' = \frac{n}{2} \text{ wenn n gerade, } n' = \frac{n-1}{2} \text{ wenn n ungerade ist.}$$

$$2^{n-1}\mathrm{Cos}\,x^n = \sum_{\nu=0}^{\nu=n'-1} n_\nu \mathrm{Cos}(n-2\nu)x + n^{n'} \cdot 2^{n-2n'-1}\mathrm{Cos}(n-2n')x.$$

$$2\,\mathrm{Cos}\,x^2 = \mathrm{Cos}\,2x + 1.$$
$$4\,\mathrm{Cos}\,x^3 = \mathrm{Cos}\,3x + 3\,\mathrm{Cos}\,x.$$
$$8\,\mathrm{Cos}\,x^4 = \mathrm{Cos}\,4x + 4\,\mathrm{Cos}\,2x + 3.$$
$$16\,\mathrm{Cos}\,x^5 = \mathrm{Cos}\,5x + 5\,\mathrm{Cos}\,3x + 10\,\mathrm{Cos}\,x.$$
$$32\,\mathrm{Cos}\,x^6 = \mathrm{Cos}\,6x + 6\,\mathrm{Cos}\,4x + 15\,\mathrm{Cos}\,2x + 10.$$
$$64\,\mathrm{Cos}\,x^7 = \mathrm{Cos}\,7x + 7\,\mathrm{Cos}\,5x + 21\,\mathrm{Cos}\,3x + 35\,\mathrm{Cos}\,x.$$
$$128\,\mathrm{Cos}\,x^8 = \mathrm{Cos}\,8x + 8\,\mathrm{Cos}\,6x + 28\,\mathrm{Cos}\,4x + 56\,\mathrm{Cos}\,2x + 35.$$
$$256\,\mathrm{Cos}\,x^9 = \mathrm{Cos}\,9x + 9\,\mathrm{Cos}\,7x + 36\,\mathrm{Cos}\,5x + 84\,\mathrm{Cos}\,3x + 126\,\mathrm{Cos}\,x.$$
$$512\,\mathrm{Cos}\,x^{10} = \mathrm{Cos}\,10x + 10\,\mathrm{Cos}\,8x + 45\,\mathrm{Cos}\,6x + 120\,\mathrm{Cos}\,4x + 210\,\mathrm{Cos}\,2x + 126.$$

$$\int \mathrm{Cos}\,x^n \partial x = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=n'-1} \frac{n_\nu \mathrm{Sin}(n-2\nu)x}{n-2\nu} + \frac{n_{n'}}{2^{2n'}} \cdot \frac{\mathrm{Sin}(n-2n')x}{n-2n'}\ ^{*)}.$$

$$\int \mathrm{Cos}\,x\,\partial x = \mathrm{Sin}\,x.$$
$$\int \mathrm{Cos}\,x^2 \partial x = \frac{1}{4}\mathrm{Sin}\,2x + \frac{1}{2}x.$$
$$\int \mathrm{Cos}\,x^3 \partial x = \frac{1}{12}\mathrm{Sin}\,3x + \frac{3}{4}\mathrm{Sin}\,x.$$
$$\int \mathrm{Cos}\,x^4 \partial x = \frac{1}{32}\mathrm{Sin}\,4x + \frac{1}{4}\mathrm{Sin}\,2x + \frac{3}{8}x.$$
$$\int \mathrm{Cos}\,x^5 \partial x = \frac{1}{80}\mathrm{Sin}\,5x + \frac{5}{48}\mathrm{Sin}\,3x + \frac{5}{8}\mathrm{Sin}\,x.$$
$$\int \mathrm{Cos}\,x^6 \partial x = \frac{1}{192}\mathrm{Sin}\,6x + \frac{3}{64}\mathrm{Sin}\,4x + \frac{15}{64}\mathrm{Sin}\,2x + \frac{5}{16}x.$$

U. s. f. nach vorstehender Tafel.

*) Für ein gerades n ist $n - 2n' = 0$, daher $\frac{\mathrm{Sin}(n-2n')x}{n-2n'} = x$.

Die Entwickelung von $\int \mathrm{Cos}\,x^n \partial x$ nach Potenzen s. Taf. III.

Tafel II.

$$\int \mathrm{Sin}\,x^n\,\partial x.$$

$$2^{2n}\,\mathrm{Sin}\,x^{2n+1} = (-1)^n \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu (2n+1)_\nu\,\mathrm{Sin}(2n-2\nu+1)x.$$

$$2^{2n-1}\,\mathrm{Sin}\,x^{2n} = (-1)^n \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} (-1)^\nu (2n)_\nu\,\mathrm{Cos}(2n-2\nu)x + \tfrac{1}{2}(2n)_n.$$

$$2\,\mathrm{Sin}\,x^2 = -\mathrm{Cos}\,2x + 1.$$
$$4\,\mathrm{Sin}\,x^3 = -\mathrm{Sin}\,3x + 3\,\mathrm{Sin}\,x.$$
$$8\,\mathrm{Sin}\,x^4 = \mathrm{Cos}\,4x - 4\,\mathrm{Cos}\,2x + 3.$$
$$16\,\mathrm{Sin}\,x^5 = \mathrm{Sin}\,5x - 5\,\mathrm{Sin}\,3x + 10\,\mathrm{Sin}\,x.$$
$$32\,\mathrm{Sin}\,x^6 = -\mathrm{Cos}\,6x + 6\,\mathrm{Cos}\,4x - 15\,\mathrm{Cos}\,2x + 10.$$
$$64\,\mathrm{Sin}\,x^7 = -\mathrm{Sin}\,7x + 7\,\mathrm{Sin}\,5x - 21\,\mathrm{Sin}\,3x + 35\,\mathrm{Sin}\,x.$$
$$128\,\mathrm{Sin}\,x^8 = \mathrm{Cos}\,8x - 8\,\mathrm{Cos}\,6x + 28\,\mathrm{Cos}\,4x - 56\,\mathrm{Cos}\,2x + 35.$$
$$256\,\mathrm{Sin}\,x^9 = \mathrm{Sin}\,9x - 9\,\mathrm{Sin}\,7x + 36\,\mathrm{Sin}\,5x - 84\,\mathrm{Sin}\,3x + 126\,\mathrm{Sin}\,x.$$
$$512\,\mathrm{Sin}\,x^{10} = -\mathrm{Cos}\,10x + 10\,\mathrm{Cos}\,8x - 45\,\mathrm{Cos}\,6x + 120\,\mathrm{Cos}\,4x - 210\,\mathrm{Cos}\,2x + 126.$$

$$\int \mathrm{Sin}\,x^{2n+1}\,\partial x = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}} \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu (2n+1)_\nu \frac{\mathrm{Cos}(2n-2\nu+1)x}{2n-2\nu+1}.$$

$$\int \mathrm{Sin}\,x^{2n}\,\partial x = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} (-1)^\nu (2n)_\nu \frac{\mathrm{Sin}(2n-2\nu)x}{2n-2\nu} + \frac{(2n)_n}{2^{2n}}\,x.$$

$$\int \mathrm{Sin}\,x\,\partial x = -\mathrm{Cos}\,x.$$
$$\int \mathrm{Sin}\,x^2\,\partial x = -\frac{1}{4}\mathrm{Sin}\,2x + \frac{x}{2}.$$
$$\int \mathrm{Sin}\,x^3\,\partial x = \frac{1}{12}\mathrm{Cos}\,3x - \frac{3}{4}\mathrm{Cos}\,x.$$
$$\int \mathrm{Sin}\,x^4\,\partial x = \frac{1}{32}\mathrm{Sin}\,4x - \frac{1}{4}\mathrm{Sin}\,2x + \frac{3}{8}x.$$
$$\int \mathrm{Sin}\,x^5\,\partial x = -\frac{1}{80}\mathrm{Cos}\,5x + \frac{5}{48}\mathrm{Cos}\,3x - \frac{5}{8}\mathrm{Cos}\,x.$$
$$\int \mathrm{Sin}\,x^6\,\partial x = -\frac{1}{192}\mathrm{Sin}\,6x + \frac{3}{64}\mathrm{Sin}\,4x - \frac{15}{64}\mathrm{Sin}\,2x + \frac{5}{16}x.$$

Die Entwicklung dieser Integrale nach Potenzen s. Taf. IV.

Taf. III.

$\int \mathrm{Cos}\, x^n \,\partial x.$

n' die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl.

$$\int \mathrm{Cos}\, x^n \,\partial x = \frac{1}{n} \mathrm{Cos}\, x^{n-1} \mathrm{Sin}\, x + \frac{n-1}{n} \int \mathrm{Cos}\, x^{n-2} \partial x.$$

$$\int \mathrm{Cos}\, x^n \,\partial x = \frac{1}{n} \mathrm{Sin}\, x \sum_{\nu=0}^{\nu=n'-1} \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_\nu}{\left(\frac{n}{2}-1\right)_\nu} \mathrm{Cos} x^{n-2\nu-1} + \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_{n'}}{\left(\frac{n}{2}\right)_{n'}} \int \mathrm{Cos}\, x^{n-2n'} \partial x.$$

$$\int \mathrm{Cos} x^2 \partial x = \frac{1}{2} \mathrm{Sin}\, x \,\mathrm{Cos}\, x + \frac{1}{2} x.$$

$$\int \mathrm{Cos}\, x^3 \partial x = \frac{1}{3} \mathrm{Sin}\, x (\mathrm{Cos} x^2 + 2).$$

$$\int \mathrm{Cos} x^4 \partial x = \frac{1}{4} \mathrm{Sin}\, x \left(\mathrm{Cos} x^3 + \frac{3}{2} \mathrm{Cos} x\right) + \frac{3}{8} x.$$

$$\int \mathrm{Cos} x^5 \partial x = \frac{1}{5} \mathrm{Sin}\, x \left(\mathrm{Cos} x^4 + \frac{4}{3} \mathrm{Cos} x^2 + \frac{8}{3}\right).$$

$$\int \mathrm{Cos} x^6 \partial x = \frac{1}{6} \mathrm{Sin}\, x \left(\mathrm{Cos} x^5 + \frac{5}{4} \mathrm{Cos}\, x^3 + \frac{15}{8} \mathrm{Cos}\, x\right) + \frac{5}{16} x.$$

$$\int \mathrm{Cos} x^7 \partial x = \frac{1}{7} \mathrm{Sin}\, x \left(\mathrm{Cos} x^6 + \frac{6}{5} \mathrm{Cos}\, x^4 + \frac{8}{5} \mathrm{Cos}\, x^2 + \frac{16}{5}\right).$$

$$\int \mathrm{Cos} x^8 \partial x = \frac{1}{8} \mathrm{Sin}\, x \left(\mathrm{Cos} x^7 + \frac{7}{6} \mathrm{Cos} x^5 + \frac{35}{24} \mathrm{Cos}\, x^3 + \frac{35}{16} \mathrm{Cos}\, x\right) + \frac{35}{128} x.$$

$$\int \mathrm{Cos}\, x^9 \partial x = \frac{1}{9} \mathrm{Sin}\, x \left(\mathrm{Cos}\, x^8 + \frac{8}{7} \mathrm{Cos}\, x^6 + \frac{48}{35} \mathrm{Cos}\, x^4 + \frac{64}{35} \mathrm{Cos} x^2 + \frac{128}{35}\right).$$

$$\int \mathrm{Cos}\, x^{10} \partial x = \frac{1}{10} \mathrm{Sin}\, x \left(\mathrm{Cos}\, x^9 + \frac{9}{8} \mathrm{Cos}\, x^7 + \frac{21}{16} \mathrm{Cos}\, x^5 + \frac{105}{64} \mathrm{Cos}\, x^3 + \frac{315}{128} \mathrm{Cos} x\right) + \frac{63}{256} x.$$

Die Entwickelung dieses Integrals nach den Sinus der Vielfachen von x s. Taf. I.

Tafel IV.

$$\int \operatorname{Sin} x^n \partial x.$$

n′ die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl.

$$\int \operatorname{Sin} x^n \partial x = -\frac{\operatorname{Sin} x^{n-1} \operatorname{Cos} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{Sin} x^{n-2} \partial x.$$

$$\int \operatorname{Sin} x^n \partial x = -\frac{\operatorname{Cos} x}{n} \sum_{\nu=0}^{\nu=n'-1} \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_\nu}{\left(\frac{n}{2}-1\right)_\nu} \operatorname{Sin} x^{n-2\nu-1} + \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_{n'}}{\left(\frac{n}{2}\right)_{n'}} \int \operatorname{Sin} x^{n-2n'} \partial x.$$

$$\int \operatorname{Sin} x^2 \partial x = -\frac{1}{2} \operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} x + \frac{1}{2} x.$$

$$\int \operatorname{Sin} x^3 \partial x = -\frac{1}{3} \operatorname{Cos} x (\operatorname{Sin} x^2 + 2).$$

$$\int \operatorname{Sin} x^4 \partial x = -\frac{1}{4} \operatorname{Cos} x \left(\operatorname{Sin} x^3 + \frac{3}{2} \operatorname{Sin} x\right) + \frac{3}{8} x.$$

$$\int \operatorname{Sin} x^5 \partial x = -\frac{1}{5} \operatorname{Cos} x \left(\operatorname{Sin} x^4 + \frac{4}{3} \operatorname{Sin} x^2 + \frac{8}{3}\right).$$

$$\int \operatorname{Sin} x^6 \partial x = -\frac{1}{6} \operatorname{Cos} x \left(\operatorname{Sin} x^5 + \frac{5}{4} \operatorname{Sin} x^3 + \frac{15}{8} \operatorname{Sin} x\right) + \frac{5}{16} x.$$

$$\int \operatorname{Sin} x^7 \partial x = -\frac{1}{7} \operatorname{Cos} x \left(\operatorname{Sin} x^6 + \frac{6}{5} \operatorname{Sin} x^4 + \frac{8}{5} \operatorname{Sin} x^2 + \frac{16}{5}\right).$$

$$\int \operatorname{Sin} x^8 \partial x = -\frac{1}{8} \operatorname{Cos} x \left(\operatorname{Sin} x^7 + \frac{7}{6} \operatorname{Sin} x^5 + \frac{35}{24} \operatorname{Sin} x^3 + \frac{35}{16} \operatorname{Sin} x\right) + \frac{35}{128} x.$$

$$\int \operatorname{Sin} x^9 \partial x = -\frac{1}{9} \operatorname{Cos} x \left(\operatorname{Sin} x^8 + \frac{8}{7} \operatorname{Sin} x^6 + \frac{48}{35} \operatorname{Sin} x^4 + \frac{64}{35} \operatorname{Sin} x^2 + \frac{128}{35}\right).$$

$$\int \operatorname{Sin} x^{10} \partial x = -\frac{1}{10} \operatorname{Cos} x \left(\operatorname{Sin} x^9 + \frac{9}{8} \operatorname{Sin} x^7 + \frac{21}{16} \operatorname{Sin} x^5 + \frac{105}{64} \operatorname{Sin} x^3 + \frac{315}{128} \operatorname{Sin} x\right) + \frac{63}{256} x.$$

Diese Tafel folgt aus der vorigen durch Vertauschung von x mit $\frac{\pi}{2} - x$.

Die Entwickelung dieses Integrals nach den Sinus oder Cosinus der Vielfachen von x s. Taf. II.

$\int \mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^n\,\partial x.$ Tafel V.

n' die grösste in $\frac{n}{2}$ und m' die grösste in $\frac{m}{2}$ enthaltene ganze Zahl.

$$\int \mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^n\,\partial x = \frac{\mathrm{Cos}\,x^{m-1}\,\mathrm{Sin}\,x^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \mathrm{Cos}\,x^{m-2}\,\mathrm{Sin}\,x^n\,\partial x.$$

$$\int \mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^n\,\partial x = -\frac{\mathrm{Sin}\,x^{n-1}\,\mathrm{Cos}\,x^{m+1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^{n-2}\,\partial x.$$

$$\int \mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^n\,\partial x = \frac{\mathrm{Cos}\,x^{m-1}\,\mathrm{Sin}\,x^{n-1}}{m+n}\left[\mathrm{Sin}\,x^2 - \frac{m-1}{m+n-2}\right] + \frac{(n-1)(m-1)}{(m+n)(m+n-2)}\int \mathrm{Cos}\,x^{m-2}\,\mathrm{Sin}\,x^{n-2}\,\partial x.$$

$$\int \mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^n\,\partial x = \frac{\mathrm{Sin}\,x^{n+1}}{m+n}\sum_{\nu=0}^{\nu=m'-1}\frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)_\nu}{\left(\frac{m+n}{2}-1\right)_\nu}\mathrm{Cos}\,x^{m-2\nu-1} + \frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)_{m'}}{\left(\frac{m+n}{2}\right)_{m'}}\int \mathrm{Cos}\,x^{m-2m'}\,\mathrm{Sin}\,x^n\,\partial x.$$

$$\int \mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^n\,\partial x = -\frac{\mathrm{Cos}\,x^{m+1}}{m+n}\sum_{\nu=0}^{\nu=n'-1}\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_\nu}{\left(\frac{m+n}{2}-1\right)_\nu}\mathrm{Sin}\,x^{n-2\nu-1} + \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_{n'}}{\left(\frac{m+n}{2}\right)_{n'}}\int \mathrm{Sin}\,x^{n-2n'}\,\mathrm{Cos}\,x^m\,\partial x.$$

$$\int \mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x\,\partial x = -\frac{\mathrm{Cos}\,x^{m+1}}{m+1}.$$

$$\int \mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^2\,\partial x = -\frac{\mathrm{Cos}\,x^{m+1}\,\mathrm{Sin}\,x}{m+2} + \frac{1}{m+2}\int \mathrm{Cos}\,x^m\,\partial x.$$

$$\int \mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^3\,\partial x = -\frac{\mathrm{Cos}\,x^{m+1}}{m+3}\left(\mathrm{Sin}\,x^2 + \frac{2}{m+1}\right).$$

$$\int \mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^4\,\partial x = -\frac{\mathrm{Cos}\,x^{m+1}}{m+4}\left(\mathrm{Sin}\,x^3 + \frac{3}{m+2}\mathrm{Sin}\,x\right) + \frac{3}{(m+4)(m+2)}\int \mathrm{Cos}\,x^m\,\partial x.$$

$$\int \mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^5\,\partial x = -\frac{\mathrm{Cos}\,x^{m+1}}{m+5}\left(\mathrm{Sin}\,x^4 + \frac{4}{m+3}\mathrm{Sin}\,x^2 + \frac{8}{(m+3)(m+1)}\right).$$

Tafel V. Fortsetzung.

$$\int \operatorname{Cos}x^m \operatorname{Sin}x^n \partial x.$$

$$\int \operatorname{Cos}x^m \operatorname{Sin}x^6 \partial x = -\frac{\operatorname{Cos}x^{m+1}}{m+6}\left[\operatorname{Sin}x^5 + \frac{5}{m+4}\operatorname{Sin}x^3 + \frac{15}{(m+4)(m+2)}\operatorname{Sin}x\right] + \frac{15}{(m+6)(m+4)(m+2)}\int \operatorname{Cos}x^m \partial x.$$

$$\int \operatorname{Cos}x^m \operatorname{Sin}x^7 \partial x = -\frac{\operatorname{Cos}x^{m+1}}{m+7}\left[\operatorname{Sin}x^6 + \frac{6}{m+5}\operatorname{Sin}x^4 + \frac{24}{(m+5)(m+3)}\operatorname{Sin}x^2 + \frac{48}{(m+5)(m+3)(m+1)}\right].$$

$$\int \operatorname{Cos}x^m \operatorname{Sin}x^8 \partial x = -\frac{\operatorname{Cos}x^{m+1}}{m+8}\left[\operatorname{Sin}x^7 + \frac{7}{m+6}\operatorname{Sin}x^5 + \frac{35}{(m+6)(m+4)}\operatorname{Sin}x^3 + \frac{105}{(m+6)(m+4)(m+2)}\operatorname{Sin}x\right] + \frac{105}{(m+8)(m+6)(m+4)(m+2)}\int \operatorname{Cos}x^m \partial x.$$

$$\int \operatorname{Cos}x^m \operatorname{Sin}x^9 \partial x = -\frac{\operatorname{Cos}x^{m+1}}{m+9}\left[\operatorname{Sin}x^8 + \frac{8}{m+7}\operatorname{Sin}x^6 + \frac{48}{(m+7)(m+5)}\operatorname{Sin}x^4 + \frac{192}{(m+7)(m+5)(m+3)}\operatorname{Sin}x^2 + \frac{384}{(m+7)(m+5)(m+3)(m+1)}\right].$$

$$\int \operatorname{Cos}x^m \operatorname{Sin}x^{10} \partial x = -\frac{\operatorname{Cos}x^{m+1}}{m+10}\left[\operatorname{Sin}x^9 + \frac{9}{m+8}\operatorname{Sin}x^7 + \frac{63}{(m+8)(m+6)}\operatorname{Sin}x^5 + \frac{315}{(m+8)(m+6)(m+4)}\operatorname{Sin}x^3 + \frac{945}{(m+8)(m+6)(m+4)(m+2)}\operatorname{Sin}x\right] + \frac{945}{(m+10)(m+8)(m+6)(m+4)(m+2)}\int \operatorname{Cos}x^m \partial x.$$

$$\int \operatorname{Sin}x^m \operatorname{Cos}x \,\partial x = \frac{\operatorname{Sin}x^{m+1}}{m+1}.$$

$$\int \operatorname{Sin}x^m \operatorname{Cos}x^2 \partial x = \frac{\operatorname{Sin}x^{m+1}\operatorname{Cos}x}{m+2} + \frac{1}{m+2}\int \operatorname{Sin}x^m \partial x.$$

$$\int \operatorname{Sin}x^m \operatorname{Cos}x^3 \partial x = \frac{\operatorname{Sin}x^{m+1}}{m+1}\left(\operatorname{Cos}x^2 + \frac{2}{m+3}\right) \quad \text{U. s. f.}$$

Diese Integrale ergeben sich aus denen umstehend durch Vertauschung von x mit $\frac{\pi}{2} - x$.

Fortsetzung von Tafel V.

$$\int \operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^n \partial x.$$

$$\int \operatorname{Cos} x^2 \operatorname{Sin} x^2 \partial x = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\operatorname{Sin} 4x - x\right).$$

$$\int \operatorname{Cos} x^2 \operatorname{Sin} x^3 \partial x = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}\operatorname{Cos} 5x - \frac{1}{3}\operatorname{Cos} 3x - 2\operatorname{Cos} x\right).$$

$$\int \operatorname{Cos} x^2 \operatorname{Sin} x^4 \partial x = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{6}\operatorname{Sin} 6x - \frac{1}{2}\operatorname{Sin} 4x - \frac{1}{2}\operatorname{Sin} 2x + 2x\right).$$

$$\int \operatorname{Cos} x^2 \operatorname{Sin} x^5 \partial x = -\frac{1}{64}\left(\frac{1}{7}\operatorname{Cos} 7x - \frac{3}{5}\operatorname{Cos} 5x + \frac{1}{3}\operatorname{Cos} 3x + 5\operatorname{Cos} x\right).$$

$$\int \operatorname{Cos} x^2 \operatorname{Sin} x^6 \partial x = -\frac{1}{128}\left(\frac{1}{8}\operatorname{Sin} 8x - \frac{2}{3}\operatorname{Sin} 6x + \operatorname{Sin} 4x + 2\operatorname{Sin} 2x - 5x\right).$$

$$\int \operatorname{Cos} x^3 \operatorname{Sin} x^2 \partial x = -\frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}\operatorname{Sin} 5x + \frac{1}{3}\operatorname{Sin} 3x - 2\operatorname{Sin} x\right).$$

$$\int \operatorname{Cos} x^3 \operatorname{Sin} x^3 \partial x = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{6}\operatorname{Cos} 6x - \frac{3}{2}\operatorname{Cos} 2x\right).$$

$$\int \operatorname{Cos} x^3 \operatorname{Sin} x^4 \partial x = \frac{1}{64}\left(\frac{1}{7}\operatorname{Sin} 7x - \frac{1}{5}\operatorname{Sin} 5x - \operatorname{Sin} 3x + 3\operatorname{Sin} x\right).$$

$$\int \operatorname{Cos} x^3 \operatorname{Sin} x^5 \partial x = -\frac{1}{128}\left(\frac{1}{8}\operatorname{Cos} 8x - \frac{1}{3}\operatorname{Cos} 6x - \frac{1}{2}\operatorname{Cos} 4x + 3\operatorname{Cos} 2x\right).$$

$$\int \operatorname{Cos} x^3 \operatorname{Sin} x^6 \partial x = -\frac{1}{256}\left(\frac{1}{9}\operatorname{Sin} 9x - \frac{3}{7}\operatorname{Sin} 7x + \frac{8}{3}\operatorname{Sin} 3x - 6\operatorname{Sin} x\right).$$

$$\int \operatorname{Cos} x^4 \operatorname{Sin} x^2 \partial x = -\frac{1}{32}\left(\frac{1}{6}\operatorname{Sin} 6x + \frac{1}{2}\operatorname{Sin} 4x - \frac{1}{2}\operatorname{Sin} 2x - 2x\right).$$

$$\int \operatorname{Cos} x^4 \operatorname{Sin} x^3 \partial x = \frac{1}{64}\left(\frac{1}{7}\operatorname{Cos} 7x + \frac{1}{5}\operatorname{Cos} 5x - \operatorname{Cos} 3x - 3\operatorname{Cos} x\right).$$

$$\int \operatorname{Cos} x^4 \operatorname{Sin} x^4 \partial x = \frac{1}{128}\left(\frac{1}{8}\operatorname{Sin} 8x - \operatorname{Sin} 4x + 3x\right).$$

$$\int \operatorname{Cos} x^4 \operatorname{Sin} x^5 \partial x = -\frac{1}{256}\left(\frac{1}{9}\operatorname{Cos} 9x - \frac{1}{7}\operatorname{Cos} 7x - \frac{4}{5}\operatorname{Cos} 5x + \frac{4}{3}\operatorname{Cos} 3x + 6\operatorname{Cos} x\right).$$

$$\int \operatorname{Cos} x^4 \operatorname{Sin} x^6 \partial x = -\frac{1}{512}\left(\frac{1}{10}\operatorname{Sin} 10x - \frac{1}{4}\operatorname{Sin} 8x - \frac{1}{2}\operatorname{Sin} 6x + 2\operatorname{Sin} 4x + \operatorname{Sin} 2x - 6x\right).$$

Die allgemeinen Formeln zu diesen Integralen s. Taf. VI.

Tafel VI.

$$\int \mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^n\,\partial x.$$

Allgemeine Formeln zur Entwickelung dieses Integrals nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von x. (Vergl. Taf. V.)

m und n positive ganze Zahlen.

m′ die grösste in $\frac{m}{2}$ enthaltene ganze Zahl.

$$(-1)^p 2^{m+2n-1} \mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^{2n} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n+m'-1} \alpha_\nu \mathrm{Cos}(m+2n-2\nu)x + 2^{m-2m'-1} \alpha_{n+m'} \mathrm{Cos}(m-2m')x;$$

$$(-1)^n 2^{m+2n} \mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^{2n+1} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n+m'} \alpha_\nu \mathrm{Sin}(m+2n-2\nu+1)x.$$

Die mit α bezeichneten Coëfficienten ergeben sich entweder für die erste oder für die zweite Formel je nachden man $p = 2n$ oder $= 2n+1$ setzt, aus den $n+m'+1$ ersten Gliedern der Entwickelung von

$$(1+q)^m (1-q)^p = \sum_{\nu=0}^{\nu=m+n} \alpha_\nu q^\nu,$$

und lassen sich allgemein ausdrücken wie folgt:

$$\alpha_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu} (-1)^\lambda p_\lambda m_{\nu-\lambda}, \text{ oder auch: } \alpha_\nu = (-1)^\nu \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu'} (-1)^\lambda m_\lambda (p-m)_{\nu-2\lambda},$$

oder auch: $\alpha_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu'} (-1)^\lambda n_\lambda (m-p)_{\nu-2\lambda}$; wo in den beiden letzten Formen ν' die grösste in $\frac{\nu}{2}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet.

$$\int \mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^{2n}\,\partial x = \frac{(-1)^p}{2^{m+2n-1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=n+m'-1} \frac{\alpha_\nu \mathrm{Sin}(m+2n-2\nu)x}{m+2n-2\nu} + \frac{(-1)^n}{2^{2n+2m'}} \alpha_{n+m'} \cdot \frac{\mathrm{Sin}(m-2m')x}{m-2m'}.$$

$$\int \mathrm{Cos}\,x^m\,\mathrm{Sin}\,x^{2n+1}\,\partial x = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{m+2n}} \sum_{\nu=0}^{\nu=n+m'} \frac{\alpha_\nu \mathrm{Cos}(m+2n-2\nu+1)x}{m+2n-2\nu+1}.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^m \, \partial x}{\operatorname{Sin} x^n}.$$

Tafel VII.

Algemeine Formeln zu Taf. VIII und IX.

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^m \, \partial x}{\operatorname{Sin} x^n} = -\frac{\operatorname{Cos} x^{m+1}}{(n-1)\operatorname{Sin} x^{n-1}} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\operatorname{Cos} x^m \, \partial x}{\operatorname{Sin} x^{n-2}}.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^m \, \partial x}{\operatorname{Sin} x^n} = \frac{\operatorname{Cos} x^{m-1}}{(m-n)\operatorname{Sin} x^{n-1}} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\operatorname{Cos} x^{m-2} \, \partial x}{\operatorname{Sin} x^n} \quad {}^{*})$$

$$\int \frac{\operatorname{Sin} x^m \, \partial x}{\operatorname{Cos} x^n} = -\int \frac{\operatorname{Cos} y^m \, \partial y}{\operatorname{Sin} y^n}, \quad \text{für } y = \frac{\pi}{2} - x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^m \, \partial x}{\operatorname{Sin} x^n} = \frac{1}{(m-n)\operatorname{Sin} x^{n-1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=m'-1} \frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)_\nu}{\left(\frac{m-n}{2}-1\right)_\nu} \operatorname{Cos} x^{m-2\nu-1} + \frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)_{m'}}{\left(\frac{m-n}{2}\right)_{m'}} \int \frac{\operatorname{Cos} x^{m-2m'} \, \partial x}{\operatorname{Sin} x^n}.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^m \, \partial x}{\operatorname{Sin} x^n} = -\frac{\operatorname{Cos} x^{m+1}}{n-1} \sum_{\nu=0}^{\nu=n'-1} \frac{\left(\frac{n-m}{2}-1\right)_\nu}{\left(\frac{n-3}{2}\right)_\nu \operatorname{Sin} x^{n-2\nu-1}} + \frac{\left(\frac{n-m}{2}-1\right)_{n'}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)_{n'}} \int \frac{\operatorname{Cos} x^m \, \partial x}{\operatorname{Sin} x^{n-2n'}} \quad {}^{*}).$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^n} = -\frac{\operatorname{Cos} x}{n-1} \sum_{\nu=0}^{\nu=n'-1} \frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)_\nu}{\left(\frac{n-3}{2}\right)_\nu \operatorname{Sin} x^{n-2\nu-1}} + \frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)_{n'}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)_{n'}} \int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^{n-2n'}}.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x \, \partial x}{\operatorname{Sin} x^n} = -\frac{1}{(n-1)\operatorname{Sin} x^{n-1}} \quad \Bigg| \quad \int \frac{\operatorname{Cos} x \, \partial x}{\operatorname{Sin} x} = \log \operatorname{Sin} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^m \, \partial x}{\operatorname{Sin} x} = \sum_{\nu=0}^{\nu=m'-1} \frac{\operatorname{Cos} x^{m-2\nu-1}}{m-2\nu-1} + \int \frac{\operatorname{Cos} x^{m-2m'} \, \partial x}{\operatorname{Sin} x}.$$

$$\int \operatorname{Cotg} x^n \, \partial x = -\frac{\operatorname{Cotg} x^{n-1}}{n-1} - \int \operatorname{Cotg} x^{n-2} \, \partial x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^{n+2\mu} \, \partial x}{\operatorname{Sin} x^n} = \frac{1}{2\mu \operatorname{Sin} x^{n-1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \frac{\left(\frac{n-1}{2}+\mu\right)_\nu}{(\mu-1)_\nu} \operatorname{Cos} x^{n+2\mu-2\nu-1} + \left(\frac{n-1}{2}+\mu\right)_\mu \int \operatorname{Cotg} x^n \, \partial x.$$

*) Die Verbindung dieser beiden Reductionsformeln s. Tafel IX am Ende. (S. 127.)

Tafel VIII. $\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^n}$. $\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^n}$.

Die allgemeinen Formeln zu diesen Integralen s. Taf. VII.

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x} = \log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^2} = -\operatorname{Cotang} x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^3} = -\frac{\operatorname{Cos} x}{2 \operatorname{Sin} x^2} + \log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^4} = -\frac{\operatorname{Cotang} x}{3}\left(\frac{1}{\operatorname{Sin} x^2} + 2\right).$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^5} = -\frac{\operatorname{Cotang} x}{4}\left(\frac{1}{\operatorname{Sin} x^3} + \frac{3}{2 \operatorname{Sin} x}\right) + \frac{3}{8} \log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^6} = -\frac{\operatorname{Cotang} x}{5}\left(\frac{1}{\operatorname{Sin} x^4} + \frac{4}{3 \operatorname{Sin} x^2} + \frac{8}{3}\right).$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^7} = -\frac{\operatorname{Cotang} x}{6}\left(\frac{1}{\operatorname{Sin} x^5} + \frac{5}{4 \operatorname{Sin} x^3} + \frac{15}{8 \operatorname{Sin} x}\right) + \frac{5}{16} \log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^8} = -\frac{\operatorname{Cotang} x}{7}\left(\frac{1}{\operatorname{Sin} x^6} + \frac{6}{5 \operatorname{Sin} x^4} + \frac{8}{5 \operatorname{Sin} x^2} + \frac{16}{5}\right).$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^9} = -\frac{\operatorname{Cotang} x}{8}\left(\frac{1}{\operatorname{Sin} x^7} + \frac{7}{6 \operatorname{Sin} x^5} + \frac{35}{24 \operatorname{Sin} x^3} + \frac{35}{16 \operatorname{Sin} x}\right)$$
$$+ \frac{35}{128} \log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^{10}} = -\frac{\operatorname{Cotang} x}{9}\left(\frac{1}{\operatorname{Sin} x^8} + \frac{8}{7 \operatorname{Sin} x^6} + \frac{48}{35 \operatorname{Sin} x^4} + \frac{64}{35 \operatorname{Sin} x^2} + \frac{128}{35}\right).$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x} = \log \operatorname{Tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right). \qquad \int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^2} = \operatorname{Tang} x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^3} = \frac{\operatorname{Sin} x}{2 \operatorname{Cos} x^2} + \log \operatorname{Tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^4} = \frac{\operatorname{Tang} x}{3}\left(\frac{1}{\operatorname{Cos} x^2} + 2\right). \quad \text{U. s. f.}$$

Diese Formeln ergeben sich aus den obenstehenden durch Vertauschung von x mit $\frac{\pi}{2} + x$, wodurch Cos x in $-$Sin x, Sin x in $+$Cos x verwandelt wird.

Tafel IX.

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^m\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^n}.$$

Allgemeine Formeln zu diesem Integrale s. Taf. VII.

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^n} = -\frac{1}{(n-1)\,\mathrm{Sin}\,x^{n-1}}.$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x} = \log \mathrm{Sin}\,x.$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^2\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^n} = -\frac{\mathrm{Cos}\,x}{(n-2)\,\mathrm{Sin}\,x^{n-1}} - \frac{1}{n-2}\int \frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^n};$$

$$= -\frac{\mathrm{Cos}\,x}{(n-1)\,\mathrm{Sin}\,x^{n-1}} - \frac{1}{n-1}\int \frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^{n-2}}.$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^2\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x} = \mathrm{Cos}\,x + \log \mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}x.$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^2\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^2} = -\mathrm{Cotang}\,x - x.$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^2\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^3} = -\frac{\mathrm{Cos}\,x}{2\,\mathrm{Sin}\,x^2} - \frac{1}{2}\log \mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}x.$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^2\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^4} = -\frac{\mathrm{Cos}\,x}{3\,\mathrm{Sin}\,x^3} + \frac{\mathrm{Cotang}\,x}{3}.$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^3\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^n} = -\frac{\mathrm{Cos}\,x^2}{(n-3)\,\mathrm{Sin}\,x^{n-1}} + \frac{2}{(n-1)(n-3)\,\mathrm{Sin}\,x^{n-1}}$$

$$= -\frac{\mathrm{Cos}\,x^2}{(n-1)\,\mathrm{Sin}\,x^{n-1}} + \frac{2}{(n-1)(n-3)\,\mathrm{Sin}\,x^{n-3}}.$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^3\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x} = \frac{1}{2}\mathrm{Cos}\,x^2 + \log \mathrm{Sin}\,x.$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^3\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^2} = -\frac{1}{\mathrm{Sin}\,x} - \mathrm{Sin}\,x.$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^3\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^3} = -\frac{\mathrm{Cotang}\,x^2}{2} - \log \mathrm{Sin}\,x.$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^3\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^4} = -\frac{\mathrm{Cos}\,x^3}{3\,\mathrm{Sin}\,x^3} + \frac{2}{3\,\mathrm{Sin}\,x}.$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^4\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^n} = -\frac{1}{(n-4)\,\mathrm{Sin}^{n-1}}\left(\mathrm{Cos}\,x^3 - \frac{3}{n-2}\,\mathrm{Cos}\,x\right) + \frac{3}{(n-2)(n-4)}\int \frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^n}$$

$$= -\frac{\mathrm{Cos}\,x^3}{(n-1)\,\mathrm{Sin}\,x^{n-1}} - \frac{3}{n-1}\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^2\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^{n-2}}.$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^4\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x} = \frac{1}{3}\mathrm{Cos}\,x^3 + \mathrm{Cos}\,x + \log \mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}x.$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^4\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^2} = -\frac{\mathrm{Cos}\,x^3}{\mathrm{Sin}\,x} - \frac{3}{2}\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x - \frac{3}{2}x.$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^4\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^3} = \frac{1}{\mathrm{Sin}\,x^2}\left(\mathrm{Cos}\,x^3 - \frac{3}{2}\mathrm{Cos}\,x\right) - \frac{3}{2}\log \mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}x.$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^4\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x^4} = -\frac{\mathrm{Cotang}\,x^3}{3} + \mathrm{Cotang}\,x + x.$$

Tafel VIII. $\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^n}$. $\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^n}$.

Die allgemeinen Formeln zu diesen Integralen s. Taf. VII.

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x} = \log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^2} = -\operatorname{Cotang} x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^3} = -\frac{\operatorname{Cos} x}{2 \operatorname{Sin} x^2} + \log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^4} = -\frac{\operatorname{Cotang} x}{3}\left(\frac{1}{\operatorname{Sin} x^2} + 2\right).$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^5} = -\frac{\operatorname{Cotang} x}{4}\left(\frac{1}{\operatorname{Sin} x^3} + \frac{3}{2 \operatorname{Sin} x}\right) + \frac{3}{8} \log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^6} = -\frac{\operatorname{Cotang} x}{5}\left(\frac{1}{\operatorname{Sin} x^4} + \frac{4}{3 \operatorname{Sin} x^2} + \frac{8}{3}\right).$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^7} = -\frac{\operatorname{Cotang} x}{6}\left(\frac{1}{\operatorname{Sin} x^5} + \frac{5}{4 \operatorname{Sin} x^3} + \frac{15}{8 \operatorname{Sin} x}\right) + \frac{5}{16} \log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^8} = -\frac{\operatorname{Cotang} x}{7}\left(\frac{1}{\operatorname{Sin} x^6} + \frac{6}{5 \operatorname{Sin} x^4} + \frac{8}{5 \operatorname{Sin} x^2} + \frac{16}{5}\right).$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^9} = -\frac{\operatorname{Cotang} x}{8}\left(\frac{1}{\operatorname{Sin} x^7} + \frac{7}{6 \operatorname{Sin} x^5} + \frac{35}{24 \operatorname{Sin} x^3} + \frac{35}{16 \operatorname{Sin} x}\right)$$
$$+ \frac{35}{128} \log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^{10}} = -\frac{\operatorname{Cotang} x}{9}\left(\frac{1}{\operatorname{Sin} x^8} + \frac{8}{7 \operatorname{Sin} x^6} + \frac{48}{35 \operatorname{Sin} x^4} + \frac{64}{35 \operatorname{Sin} x^2} + \frac{128}{35}\right).$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x} = \log \operatorname{Tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right). \qquad \int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^2} = \operatorname{Tang} x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^3} = \frac{\operatorname{Sin} x}{2 \operatorname{Cos} x^2} + \log \operatorname{Tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^4} = \frac{\operatorname{Tang} x}{3}\left(\frac{1}{\operatorname{Cos} x^2} + 2\right). \quad \text{U. s. f.}$$

Diese Formeln ergeben sich aus den obenstehenden durch Vertauschung von x mit $\frac{\pi}{2} + x$, wodurch $\operatorname{Cos} x$ in $-\operatorname{Sin} x$, $\operatorname{Sin} x$ in $+\operatorname{Cos} x$ verwandelt wird.

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^m \partial x}{\operatorname{Sin} x^n}.$$

Tafel IX.

Allgemeine Formeln zu diesem Integrale s. Taf. VII.

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x \, \partial x}{\operatorname{Sin} x^n} = -\frac{1}{(n-1)\operatorname{Sin} x^{n-1}}. \qquad \int \frac{\operatorname{Cos} x \, \partial x}{\operatorname{Sin} x} = \log \operatorname{Sin} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^2 \partial x}{\operatorname{Sin} x^n} = -\frac{\operatorname{Cos} x}{(n-2)\operatorname{Sin} x^{n-1}} - \frac{1}{n-2}\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^n};$$

$$= -\frac{\operatorname{Cos} x}{(n-1)\operatorname{Sin} x^{n-1}} - \frac{1}{n-1}\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^{n-2}}.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^2 \partial x}{\operatorname{Sin} x} = \operatorname{Cos} x + \log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} x. \qquad \int \frac{\operatorname{Cos} x^2 \partial x}{\operatorname{Sin} x^3} = -\frac{\operatorname{Cos} x}{2 \operatorname{Sin} x^2} - \frac{1}{2} \log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^2 \partial x}{\operatorname{Sin} x^2} = -\operatorname{Cotang} x - x. \qquad \int \frac{\operatorname{Cos} x^2 \partial x}{\operatorname{Sin} x^4} = -\frac{\operatorname{Cos} x}{3 \operatorname{Sin} x^3} + \frac{\operatorname{Cotang} x}{3}.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^3 \partial x}{\operatorname{Sin} x^n} = -\frac{\operatorname{Cos} x^2}{(n-3)\operatorname{Sin} x^{n-1}} + \frac{2}{(n-1)(n-3)\operatorname{Sin} x^{n-1}}$$

$$= -\frac{\operatorname{Cos} x^2}{(n-1)\operatorname{Sin} x^{n-1}} + \frac{2}{(n-1)(n-3)\operatorname{Sin} x^{n-3}}.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^3 \partial x}{\operatorname{Sin} x} = \frac{1}{2}\operatorname{Cos} x^2 + \log \operatorname{Sin} x. \qquad \int \frac{\operatorname{Cos} x^3 \partial x}{\operatorname{Sin} x^3} = -\frac{\operatorname{Cotang} x^2}{2} - \log \operatorname{Sin} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^3 \partial x}{\operatorname{Sin} x^2} = -\frac{1}{\operatorname{Sin} x} - \operatorname{Sin} x. \qquad \int \frac{\operatorname{Cos} x^3 \partial x}{\operatorname{Sin} x^4} = -\frac{\operatorname{Cos} x^3}{3 \operatorname{Sin} x^3} + \frac{2}{3 \operatorname{Sin} x}.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^4 \partial x}{\operatorname{Sin} x^n} = -\frac{1}{(n-4)\operatorname{Sin}^{n-1}}\left(\operatorname{Cos} x^3 - \frac{3}{n-2}\operatorname{Cos} x\right) + \frac{3}{(n-2)(n-4)}\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^n}$$

$$= -\frac{\operatorname{Cos} x^3}{(n-1)\operatorname{Sin} x^{n-1}} - \frac{3}{n-1}\int \frac{\operatorname{Cos} x^2 \partial x}{\operatorname{Sin} x^{n-2}}.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^4 \partial x}{\operatorname{Sin} x} = \frac{1}{3}\operatorname{Cos} x^3 + \operatorname{Cos} x + \log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^4 \partial x}{\operatorname{Sin} x^2} = -\frac{\operatorname{Cos} x^3}{\operatorname{Sin} x} - \frac{3}{2}\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x - \frac{3}{2} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^4 \partial x}{\operatorname{Sin} x^3} = \frac{1}{\operatorname{Sin} x^2}\left(\operatorname{Cos} x^3 - \frac{3}{2}\operatorname{Cos} x\right) - \frac{3}{2}\log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^4 \partial x}{\operatorname{Sin} x^4} = -\frac{\operatorname{Cotang} x^3}{3} + \operatorname{Cotang} x + x.$$

Tafel IX. Fortsetzung.

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^m \partial x}{\operatorname{Sin} x^n}.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^5 \partial x}{\operatorname{Sin} x^n} = -\frac{1}{(n-5)\operatorname{Sin} x^{n-1}}\left(\operatorname{Cos} x^4 - \frac{4}{n-3}\operatorname{Cos} x^2 + \frac{8}{(n-1)(n-3)}\right).$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^5 \partial x}{\operatorname{Sin} x} = \frac{1}{4}\operatorname{Cos} x^4 + \frac{1}{2}\operatorname{Cos} x^2 + \log \operatorname{Sin} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^5 \partial x}{\operatorname{Sin} x^2} = \frac{1}{3\operatorname{Sin} x}\left(\operatorname{Cos} x^4 + 4\operatorname{Cos} x^2 - 8\right).$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^5 \partial x}{\operatorname{Sin} x^3} = \frac{1}{2\operatorname{Sin} x^2}(\operatorname{Cos} x^4 - 2) - 2\log \operatorname{Sin} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^5 \partial x}{\operatorname{Sin} x^4} = \frac{1}{\operatorname{Sin} x^3}\left(\operatorname{Cos} x^4 - 4\operatorname{Cos} x^2 + \frac{8}{3}\right).$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^5 \partial x}{\operatorname{Sin} x^5} = -\frac{1}{4}\operatorname{Cotang} x^4 + \frac{1}{2}\operatorname{Cotang} x^2 + \log \operatorname{Sin} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^5 \partial x}{\operatorname{Sin} x^6} = -\frac{1}{\operatorname{Sin} x^5}\left(\operatorname{Cos} x^4 - \frac{4}{3}\operatorname{Cos} x^2 + \frac{8}{15}\right).$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^6 \partial x}{\operatorname{Sin} x^n} = -\frac{1}{(n-6)\operatorname{Sin} x^{n-1}}\left(\operatorname{Cos} x^5 - \frac{5}{n-4}\operatorname{Cos} x^3 + \frac{15}{(n-2)(n-4)}\operatorname{Cos} x\right)$$
$$-\frac{15}{(n-2)(n-4)(n-6)}\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^n}.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^6 \partial x}{\operatorname{Sin} x} = \frac{\operatorname{Cos} x^5}{5} + \frac{\operatorname{Cos} x^3}{3} + \operatorname{Cos} x + \log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^6 \partial x}{\operatorname{Sin} x^2} = \frac{1}{4\operatorname{Sin} x}\left(\operatorname{Cos} x^5 + \frac{5}{2}\operatorname{Cos} x^3 - \frac{15}{2}\operatorname{Cos} x\right) - \frac{15}{8} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^6 \partial x}{\operatorname{Sin} x^3} = \frac{1}{3\operatorname{Sin} x^2}\left(\operatorname{Cos} x^5 + 5\operatorname{Cos} x^3 - \frac{15}{2}\operatorname{Cos} x\right) - \frac{5}{2}\log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^6 \partial x}{\operatorname{Sin} x^4} = \frac{1}{2\operatorname{Sin} x^3}\left(\operatorname{Cos} x^5 - \frac{20}{3}\operatorname{Cos} x^3 + 5\operatorname{Cos} x\right) + \frac{5}{2} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^6 \partial x}{\operatorname{Sin} x^5} = \frac{1}{\operatorname{Sin} x^4}\left(\operatorname{Cos} x^5 - \frac{25}{8}\operatorname{Cos} x^3 + \frac{15}{8}\operatorname{Cos} x\right) + \frac{15}{8}\log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^6 \partial x}{\operatorname{Sin} x^6} = -\frac{1}{5}\operatorname{Cotang} x^5 + \frac{1}{3}\operatorname{Cotang} x^3 - \operatorname{Cotang} x - x.$$

Fortsetzung von Tafel IX.

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^m \partial x}{\operatorname{Sin} x^n}.$$

Vergleiche Tafel VII.

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^m \partial x}{\operatorname{Sin} x^n} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\operatorname{Cos} x^{m-1}}{\operatorname{Sin} x^{n-1}} - \frac{m-1}{n-1}\int \frac{\operatorname{Cos} x^{m-2}\partial x}{\operatorname{Sin} x^{n-2}}.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x^m \partial x}{\operatorname{Sin} x^n} = -\frac{1}{n-1}\sum_{\nu=0}^{\nu=\lambda-1} \frac{(-1)^\nu\left(\frac{m-1}{2}\right)_\nu}{\left(\frac{n-3}{2}\right)_\nu}\cdot\frac{\operatorname{Cos} x^{m-2\nu-1}}{\operatorname{Sin} x^{n-2\nu-1}}$$
$$+(-1)^\lambda \frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)_\lambda}{\left(\frac{n-1}{2}\right)_\lambda}\int \frac{\operatorname{Cos} x^{m-2\lambda}\partial x}{\operatorname{Sin} x^{n-2\lambda}}.$$

$$\int \operatorname{Cotang} x^n \partial x = -\sum_{\nu=0}^{\nu=n'-1}(-1)^\nu \frac{\operatorname{Cotang} x^{n-2\nu-1}}{n-2\nu-1} + (-1)^{n'}\int \operatorname{Cotang} x^{n-2n'}\partial x.$$

(Diese Formel folgt aus der vorigen für $m = n$, wenn $\lambda = n' =$ der grössten in $\frac{n}{2}$ enthaltenen ganzen Zahl genommen wird.)

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^n}.$$

Tafel X.

Allgem. Formeln zu Taf. XI.

n' die grösste in $\frac{n}{2}$, m' die grösste in $\frac{m}{2}$ enthaltene ganze Zahl.

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^n} = -\frac{1}{(n-1)\operatorname{Cos} x^{m-1}\operatorname{Sin} x^{n-1}} + \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^{n-2}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^n} = \frac{1}{(m-1)\operatorname{Cos} x^{m-1}\operatorname{Sin} x^{n-1}} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^{m-2} \operatorname{Sin} x^n}.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^n} = \frac{(n-1)\operatorname{Sin} x^2 - (m-1)\operatorname{Cos} x^2}{(m-1)(n-1)\operatorname{Cos} x^{m-1}\operatorname{Sin} x^{n-1}}$$
$$+\frac{(m+n-2)(m+n-4)}{(m-1)(n-1)}\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^{m-2}\operatorname{Sin} x^{n-2}}.$$

Tafel X. Fortsetzung.

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^n}.$$

Allgem. Formeln zu Taf. XI.

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^n} = \frac{1}{(m-1)\operatorname{Sin} x^{n-1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=m'-1} \frac{\left(\frac{m+n}{2}-1\right)_\nu}{\left(\frac{m-3}{2}\right)_\nu \operatorname{Cos} x^{m-2\nu-1}}$$

$$+ \frac{\left(\frac{m+n}{2}-1\right)_{m'}}{\left(\frac{m-1}{2}\right)_{m'}} \int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^{m-2m'} \operatorname{Sin} x^n}.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^n} = -\frac{1}{(n-1)\operatorname{Cos} x^{m-1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=n'-1} \frac{\left(\frac{m+n}{2}-1\right)_\nu}{\left(\frac{n-3}{2}\right)_\nu \operatorname{Sin} x^{n-2\nu-1}}$$

$$+ \frac{\left(\frac{m+n}{2}-1\right)_{n'}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)_{n'}} \int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^{n-2n'}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x} = \sum_{\nu=0}^{\nu=m'-1} \frac{1}{(m-2\nu-1)\operatorname{Cos} x^{m-2\nu-1}} + \int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^{m-2m'} \operatorname{Sin} x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} x^n} = -\sum_{\nu=0}^{\nu=n'-1} \frac{1}{(n-2\nu-1)\operatorname{Sin} x^{n-2\nu-1}} + \int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x^{n-2n'} \operatorname{Cos} x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} x} = \log \operatorname{Tang} x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^n \operatorname{Sin} x^n} = 2^{n-1} \int \frac{\partial y}{\operatorname{Sin} y^n}, \quad \text{für } y = 2x. \quad \text{(S. Tafel VIII.)}$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^2 \operatorname{Sin} x} = \frac{1}{\operatorname{Cos} x} + \log \operatorname{Tang} \frac{x}{2}.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^3 \operatorname{Sin} x} = \frac{1}{2\operatorname{Cos} x^2} + \log \operatorname{Tang} x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^4 \operatorname{Sin} x} = \frac{1}{3\operatorname{Cos} x^3} + \frac{1}{\operatorname{Cos} x} + \log \operatorname{Tang} \frac{x}{2}.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^5 \operatorname{Sin} x} = \frac{1}{4\operatorname{Cos} x^4} + \frac{1}{2\operatorname{Cos} x^2} + \log \operatorname{Tang} x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^n}.$$

Tafel XI.

Allgemeine Formeln s. vorige Tafel.

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^2} = \frac{1 - m \operatorname{Cos} x^2}{(m-1) \operatorname{Cos} x^{m-1} \operatorname{Sin} x} + \frac{m(m-2)}{m-1} \int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^{m-2}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} x^2} = -\frac{1}{\operatorname{Sin} x} + \log \operatorname{Tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^2 \operatorname{Sin} x^2} = -2 \operatorname{Cotang} 2x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^3 \operatorname{Sin} x^2} = \frac{1 - 3 \operatorname{Cos} x^2}{2 \operatorname{Cos} x^2 \operatorname{Sin} x} + \frac{3}{2} \log \operatorname{Tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^4 \operatorname{Sin} x^2} = \frac{1}{3 \operatorname{Cos} x^3 \operatorname{Sin} x} - \frac{8}{3} \operatorname{Cotang} 2x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^3} = \frac{2 - (m+1) \operatorname{Cos} x^2}{2(m-1) \operatorname{Cos} x^{m-1} \operatorname{Sin} x^2} + \frac{m+1}{2} \int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^{m-2} \operatorname{Sin} x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} x^3} = -\frac{1}{2 \operatorname{Sin} x^2} + \log \operatorname{Tang} x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^2 \operatorname{Sin} x^3} = -\frac{1}{2 \operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} x^2} + \frac{3}{2 \operatorname{Cos} x} + \frac{3}{2} \log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^3 \operatorname{Sin} x^3} = -\frac{2 \operatorname{Cos} 2x}{(\operatorname{Sin} 2x)^2} + 2 \log \operatorname{Tang} x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^4 \operatorname{Sin} x^3} = -\frac{1}{2 \operatorname{Cos} x^3 \operatorname{Sin} x^2} + \frac{5}{6 \operatorname{Cos} x^3} + \frac{5}{2 \operatorname{Cos} x} + \frac{5}{2} \log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^4} = -\frac{1}{3 \operatorname{Cos} x^{m-1} \operatorname{Sin} x^3} + \frac{m+2}{3} \int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^2}.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} x^4} = -\frac{1}{3 \operatorname{Sin} x^3} - \frac{1}{\operatorname{Sin} x} + \log \operatorname{Tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^2 \operatorname{Sin} x^4} = -\frac{1}{3 \operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} x^3} - \frac{8}{3} \operatorname{Cotang} 2x.$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^3 \operatorname{Sin} x^4} = \frac{1}{2 \operatorname{Cos} x^2 \operatorname{Sin} x^3} - \frac{5}{6 \operatorname{Sin} x^3} - \frac{5}{2 \operatorname{Sin} x} + \frac{5}{2} \log \operatorname{Tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x^4 \operatorname{Sin} x^4} = -\frac{8}{3} \operatorname{Cotg} 2x \left(\frac{1}{(\operatorname{Sin} 2x)^2} + 2\right).$$

Tafel XII.

$$\int \frac{\partial x}{a + b \operatorname{Cos} x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{a+b\operatorname{Cos} x} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{Arc.Tang} \frac{\operatorname{Sin} x\sqrt{a^2-b^2}}{b+a\operatorname{Cos} x}$$

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{Arc.Sin} \frac{\operatorname{Sin} x\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\operatorname{Cos} x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{Arc.Cos} \frac{b+a\operatorname{Cos} x}{a+b\operatorname{Cos} x}\ ; \quad \text{wenn } a^2 > b^2.$$

$$\int \frac{\partial x}{a+b\operatorname{Cos} x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \operatorname{Arc.Tang} \frac{\operatorname{Sin} x\sqrt{b^2-a^2}}{b+a\operatorname{Cos} x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \log \frac{b+a\operatorname{Cos} x + \operatorname{Sin} x\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\operatorname{Cos} x}\ ; \quad \text{wenn } a^2 < b^2.$$

$$\int \frac{\partial x}{1+\operatorname{Cos} x} = \operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}x.$$

$$\int \frac{\partial x}{1-\operatorname{Cos} x} = -\operatorname{Cotang}\tfrac{1}{2}x.$$

$$\int \frac{\partial x}{a+b\operatorname{Cos} x+c\operatorname{Sin} x} = \int \frac{\partial y}{a+h\operatorname{Cos} y}\ ; \quad \text{für } h=\sqrt{b^2+c^2}\ ,\ b = h\operatorname{Cos}\varepsilon,$$

$$c = h\operatorname{Sin}\varepsilon\ ,\quad y = x-\varepsilon.$$

Andere Formen der vorstehenden Integrale sind:

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos}\alpha + \operatorname{Cos} x} = \frac{1}{\operatorname{Sin}\alpha} \log \frac{\operatorname{Cos}\frac{x-\alpha}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{x+\alpha}{2}}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{Sin}\alpha} \log \frac{1+\operatorname{Cos}(x-\alpha)}{\operatorname{Cos}\alpha+\operatorname{Cos} x}$$

$$= \frac{2}{\operatorname{Sin}\alpha} \operatorname{Arc.Tang}\left(\operatorname{Tang}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{Tang}\frac{\alpha}{2}\right).$$

$$\int \frac{\partial x}{1+\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos} x} = \frac{2}{\operatorname{Sin}\alpha} \operatorname{Arc.Tang}\left(\operatorname{Tang}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{Tang}\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\operatorname{Sin}\alpha} \operatorname{Arc.Tang} \frac{\operatorname{Sin} x\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Cos}\alpha+\operatorname{Cos} x}.$$

Fortsetzung von Tafel XII.

$$\int \frac{\partial x}{a + b\,\mathrm{Cos}\,x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,\alpha + \mathrm{Sin}\,x} = \frac{1}{\mathrm{Cos}\,\alpha} \log \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{x+\alpha}{2}}{\mathrm{Cos}\,\frac{x-\alpha}{2}}$$

$$= -\frac{2}{\mathrm{Cos}\,\alpha}\,\mathfrak{Arc.Cotang}\left[\mathrm{Tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cdot \mathrm{Tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

$$\int \frac{\partial x}{1 + \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,x} = \frac{2}{\mathrm{Cos}\,\alpha}\,\mathrm{Arc.Tang}\left[\mathrm{Tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cdot \mathrm{Tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

$$\int \frac{\partial x}{\mathfrak{Cos}\,x + \mathfrak{Cos}\,\alpha} = \frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\alpha} \log \frac{\mathfrak{Cos}\,\frac{x+\alpha}{2}}{\mathfrak{Cos}\,\frac{x-\alpha}{2}}$$

$$= \frac{2}{\mathfrak{Sin}\,\alpha}\,\mathfrak{Arc.Tang}\left(\mathfrak{Tang}\,\frac{x}{2}\cdot \mathfrak{Tang}\,\frac{\alpha}{2}\right).$$

$$\int \frac{\partial x}{1 + \mathfrak{Cos}\,\alpha\,\mathfrak{Cos}\,x} = \frac{2}{\mathfrak{Sin}\,\alpha}\,\mathrm{Arc.Tang}\left(\mathfrak{Tang}\,\frac{x}{2}\cdot \mathfrak{Tang}\,\frac{\alpha}{2}\right).$$

$$\int \frac{\partial x}{\mathfrak{Sin}\,x + \mathfrak{Sin}\,\alpha} = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\alpha} \log \frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{x+\alpha}{2}}{\mathfrak{Cos}\,\frac{x-\alpha}{2}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{\mathfrak{Cos}\,x + \mathrm{Cos}\,\alpha} = \frac{2}{\mathrm{Sin}\,\alpha}\,\mathrm{Arc.Tang}\left(\mathfrak{Tang}\,\frac{x}{2}\cdot \mathrm{Tang}\,\frac{\alpha}{2}\right).$$

$$\int \frac{\partial x}{1 + \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathfrak{Cos}\,x} = \frac{2}{\mathrm{Sin}\,\alpha}\,\mathfrak{Arc.Tang}\left(\mathfrak{Tang}\,\frac{x}{2}\cdot \mathrm{Tang}\,\frac{\alpha}{2}\right).$$

Anmerkung. Bei der Anwendung dieser Formeln dürfen die Grenzen der Integration nicht solche sein, zwischen welchen der Nenner unter dem Integralzeichen verschwindet.

Tafel XII. Fortsetzung.

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x + p + qi}.$$

p und q reelle Grössen. $i = \sqrt{-1}$.

Man bestimme die reellen Grössen $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$ aus den Gleichungen:

$$A + Bi = \sqrt{1-(p+qi)^2}, \quad C = A^2 + B^2, \quad \alpha + \beta i = \sqrt{\frac{1+p+qi}{1-p-qi}},$$

$$\gamma = \alpha^2 + \beta^2, \quad \text{und setze } \operatorname{Tang}\frac{x}{2} = u, \quad \mathfrak{Tang}\frac{x}{2} = v, \text{ so ist:}$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Cos} x + p + qi} = \frac{A}{C}\,\mathfrak{Arc.Tang}\frac{2\alpha u}{\gamma + u^2} - \frac{B}{C}\operatorname{Arc.Tang}\frac{2\beta u}{\gamma - u^2}$$
$$- i\left(\frac{B}{C}\,\mathfrak{Arc.Tang}\frac{2\alpha u}{\gamma + u^2} + \frac{A}{C}\operatorname{Arc.Tang}\frac{2\beta u}{\gamma - u^2}\right).$$

$$\int \frac{\partial x}{\mathfrak{Cos}\, x + p + qi} = \frac{A}{C}\operatorname{Arc.Tang}\frac{2\alpha v}{\gamma - v^2} - \frac{B}{C}\,\mathfrak{Arc.Tang}\frac{2\beta v}{\gamma + v^2}$$
$$- i\left(\frac{B}{C}\operatorname{Arc.Tang}\frac{2\alpha v}{\gamma - v^2} + \frac{A}{C}\,\mathfrak{Arc.Tang}\frac{2\beta v}{\gamma + v^2}\right).$$

$$A + Bi = \sqrt{1-(p+qi)^2}, \quad C = A^2 + B^2, \quad \alpha + \beta i = \sqrt{\frac{1-p-qi}{1+p+qi}},$$

$$\gamma = \alpha^2 + \beta^2, \quad w = \operatorname{Tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

$$\int \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x + p + qi} = -\frac{A}{C}\,\mathfrak{Arc.Tang}\frac{2\alpha w}{\gamma + w^2} - \frac{B}{C}\operatorname{Arc.Tang}\frac{2\beta w}{w^2 - \gamma}$$
$$+ i\left(\frac{B}{C}\,\mathfrak{Arc.Tang}\frac{2\alpha w}{\gamma + w^2} - \frac{A}{C}\operatorname{Arc.Tang}\frac{2\beta w}{w^2 - \gamma}\right).$$

$$A + Bi = \sqrt{1+(p+qi)^2}, \quad C = A^2 + B^2, \quad v = \mathfrak{Tang}\frac{x}{2}.$$

$$\int \frac{\partial x}{\mathfrak{Sin}\, x + p + qi} = \frac{A}{C}\,\mathfrak{Arc.Tang}\frac{2[(Ap+Bq)v - A]}{C + (pv-1)^2 + q^2v^2}$$
$$+ \frac{B}{C}\operatorname{Arc.Tang}\frac{2[(Aq-Bp)v + B]}{C - (pv-1)^2 - q^2v^2}$$
$$- i\left[\frac{B}{C}\,\mathfrak{Arc.Tang}\frac{2[(Ap+Bq)v - A]}{C + (pv-1)^2 + q^2v^2}\right.$$
$$\left. - \frac{A}{C}\operatorname{Arc.Tang}\frac{2[(Aq-Bp)v + B]}{C - (pv-1)^2 - q^2v^2}\right].$$

Tafel XIII.

$$\int \frac{\partial x}{a+b\,\mathrm{Cos}\,x}.$$

Bez. $a+b\,\mathrm{Cos}\,x = X$. (s. vorhergehende Tafel.)

Allgemeine Reductionsformel.

$$\int\frac{\partial x}{X^n} = \frac{1}{b^2-a^2}\left[\frac{b\,\mathrm{Sin}\,x}{(n-1)X^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{\partial x}{X^{n-2}} - \frac{(2n-3)a}{n-1}\int\frac{\partial x}{X^{n-1}}\right].$$

$$\int\frac{\partial x}{X^2} = \frac{b\,\mathrm{Sin}\,x}{(b^2-a^2)X} - \frac{a}{b^2-a^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^3} = \frac{1}{(b^2-a^2)^2}\left[\frac{(b^2-a^2)b\,\mathrm{Sin}\,x}{2X^2} - \frac{3ab\,\mathrm{Sin}\,x}{2X}\right] + \frac{a^2+\frac{1}{2}b^2}{(b^2-a^2)^2}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^4} = \frac{1}{(b^2-a^2)^3}\left[\frac{(b^2-a^2)^2 b\,\mathrm{Sin}\,x}{3X^3} - \frac{5(b^2-a^2)ab\,\mathrm{Sin}\,x}{6X^2} + \frac{(11a^2+4b^2)b\,\mathrm{Sin}\,x}{6X}\right] - \frac{a^3+\frac{3}{2}ab^2}{(b^2-a^2)^3}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^5} = \frac{1}{(b^2-a^2)^4}\left[\frac{(b^2-a^2)^3 b\,\mathrm{Sin}\,x}{4X^4} - \frac{7(b^2-a^2)^2 ab\,\mathrm{Sin}\,x}{12X^3} + \frac{(26a^2+9b^2)(b^2-a^2)b\,\mathrm{Sin}\,x}{24X^2} - \frac{5(10a^2+11b^2)ab\,\mathrm{Sin}\,x}{24X}\right] + \frac{a^4+3a^2b^2+\frac{3}{8}b^4}{(b^2-a^2)^4}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{X^6} = \frac{1}{(b^2-a^2)^5}\left[\frac{(b^2-a^2)^4 b\,\mathrm{Sin}\,x}{5X^5} - \frac{9(b^2-a^2)^3 ab\,\mathrm{Sin}\,x}{20X^4} + \frac{(47a^2+16b^2)(b^2-a^2)^2 b\,\mathrm{Sin}\,x}{60X^3} - \frac{(154a^2+161b^2)(b^2-a^2)ab\,\mathrm{Sin}\,x}{120X^2} + \frac{(274a^4+607a^2b^2+64b^4)b\,\mathrm{Sin}\,x}{120X}\right] - \frac{a^5+5a^3b^2+\frac{15}{8}ab^4}{(b^2-a^2)^5}\int\frac{\partial x}{X}.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x\cdot X} = \frac{b}{a^2-b^2}\log(a+b\,\mathrm{Cos}\,x) + \frac{1}{b+a}\log\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}x + \frac{1}{b-a}\log\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}x.$$

$$\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x\cdot X} = \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{X} = \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{\mathrm{Cos}\,x} - \frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{a+b\,\mathrm{Cos}\,x}.$$

Tafel XIV.

Zerlegung von Cos nx und Sin nx in Factoren.

$$\operatorname{Cos} nx = 2^{n-1}\prod_{\mu=0}^{\mu=n-1}\left[\operatorname{Cos} x - \operatorname{Cos}\frac{(2\mu+1)\pi}{2n}\right].$$

$$\operatorname{Sin} 2nx = 2^{2n-1}\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x\prod_{\mu=1}^{\mu=n-1}\left[\operatorname{Cos} x^2 - \left(\operatorname{Cos}\frac{\mu\pi}{2n}\right)^2\right].$$

$$\operatorname{Sin}(2n+1)x = 2^{2n}\operatorname{Sin} x\prod_{\mu=1}^{\mu=n}\left[\operatorname{Cos} x^2 - \left(\operatorname{Cos}\frac{\mu\pi}{2n+1}\right)^2\right].$$

$$\int\frac{\operatorname{Cos} x\,\partial x}{\operatorname{Cos} 2x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{1+\sqrt{2}\cdot\operatorname{Sin} x}{1-\sqrt{2}\cdot\operatorname{Sin} x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{Arc. Tang}\,(\sqrt{2}\cdot\operatorname{Sin} x).$$

$$\int\frac{\operatorname{Cos} x\,\partial x}{\operatorname{Sin} 2x} = \frac{1}{2}\log\operatorname{Tang}\frac{1}{2}.$$

$$\int\frac{\operatorname{Sin} x\,\partial x}{\operatorname{Cos} 2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{Arc. Tang}\,(\sqrt{2}\cdot\operatorname{Cos} x).$$

$$\int\frac{\operatorname{Sin} x\,\partial x}{\operatorname{Sin} 2x} = \frac{1}{2}\log\operatorname{Tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$

$$\int\frac{\operatorname{Cos} x\,\partial x}{\operatorname{Cos} 3x} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{Arc. Tang}\,(\sqrt{3}\cdot\operatorname{Tang} x).$$

$$\int\frac{\operatorname{Cos} x\,\partial x}{\operatorname{Sin} 3x} = \frac{1}{3}\log\operatorname{Sin} x - \frac{1}{6}\log\left(\operatorname{Sin} x^2 - \frac{3}{4}\right).$$

$$\int\frac{\operatorname{Cos} x^2\,\partial x}{\operatorname{Cos} 3x} = \frac{1}{2}\,\text{Arc. Tang}\,(2\operatorname{Sin} x).$$

$$\int\frac{\operatorname{Cos} x^2\,\partial x}{\operatorname{Sin} 3x} = \frac{1}{3}\log\operatorname{Tang}\frac{3x}{2} - \frac{1}{2}\,\text{Arc. Tang}\,(2\operatorname{Cos} x).$$

$$\int\frac{\operatorname{Sin} x\,\partial x}{\operatorname{Cos} 3x} = \frac{1}{3}\log\operatorname{Cos} x - \frac{1}{6}\log\left(\operatorname{Cos} x^2 - \frac{3}{4}\right).$$

$$\int\frac{\operatorname{Sin} x\,\partial x}{\operatorname{Sin} 3x} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}{\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{Arc. Cotang}\,(\sqrt{3}\cdot\operatorname{Cotang} x).$$

$$\int\frac{\operatorname{Sin} x^2\,\partial x}{\operatorname{Cos} 3x} = \frac{1}{3}\log\operatorname{Tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}x\right) - \frac{1}{2}\,\text{Arc. Tang}\,(2\operatorname{Sin} x).$$

$$\int\frac{\operatorname{Sin} x^2\,\partial x}{\operatorname{Sin} 3x} = \frac{1}{2}\,\text{Arc. Tang}\,(2\operatorname{Cos} x).$$

Fortsetzung von **Tafel XIV.**

Durch Zerlegung in einfache Brüche erhält man, wenn beziehungsweise in den folgenden Formeln $m < n$, $m < 2n-1$, $m < 2n$ ist:

$$\frac{\operatorname{Cos} x^m}{\operatorname{Cos} n x} = \frac{1}{n} \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \frac{(-1)^\mu \operatorname{Sin} \frac{(2\mu+1)\pi}{2n} \cdot \left(\operatorname{Cos} \frac{(2\mu+1)\pi}{2n}\right)^m}{\operatorname{Cos} x - \operatorname{Cos} \frac{(2\mu+1)\pi}{2n}}.$$

$$\frac{\operatorname{Cos} x^m}{\operatorname{Sin} 2 n x} = \frac{1}{2n \operatorname{Sin} x} \sum_{\mu=1}^{\mu=n-1} (-1)^{\mu-1} \left(\operatorname{Sin} \frac{\mu\pi}{2n}\right)^2 \left(\operatorname{Cos} \frac{\mu\pi}{2n}\right)^m \left[\frac{1}{\operatorname{Cos} x - \operatorname{Cos} \frac{\mu\pi}{2n}} + \frac{(-1)^m}{\operatorname{Cos} x + \operatorname{Cos} \frac{\mu\pi}{2n}}\right].$$

$$\frac{\operatorname{Cos} x^m}{\operatorname{Sin} (2n+1) x} = \frac{1}{(2n+1) \operatorname{Sin} x} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} (-1)^{\mu-1} \left(\operatorname{Sin} \frac{\mu\pi}{2n+1}\right)^2 \left(\operatorname{Cos} \frac{\mu\pi}{2n+1}\right)^m \left[\frac{1}{\operatorname{Cos} x - \operatorname{Cos} \frac{\mu\pi}{2n+1}} + \frac{(-1)^{m-1}}{\operatorname{Cos} x + \operatorname{Cos} \frac{\mu\pi}{2n+1}}\right].$$

Mit Hülfe der vorigen Tafel finden sich die Integrale dieser Ausdrücke. Vertauscht man x mit $\frac{\pi}{2} - x$, so ergeben sich Brüche von ähnlicher Form, welche im Zähler $\operatorname{Sin} x^m$ statt $\operatorname{Cos} x^m$ haben.

Reduction von $\int \frac{\operatorname{Cos} m x}{\operatorname{Cos} x^n} \partial x$.

$$\int \frac{\operatorname{Cos} m x}{\operatorname{Cos} x^n} \partial x = 2 \int \frac{\operatorname{Cos} (m-1) x}{\operatorname{Cos} x^{n-1}} \partial x - \int \frac{\operatorname{Cos} (m-2) x}{\operatorname{Cos} x^n} \partial x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} m x}{\operatorname{Sin} x^n} \partial x = -2 \int \frac{\operatorname{Sin} (m-1) x}{\operatorname{Sin} x^{n-1}} \partial x + \int \frac{\operatorname{Cos} (m-2) x}{\operatorname{Sin} x^n} \partial x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Sin} m x}{\operatorname{Cos} x^n} \partial x = 2 \int \frac{\operatorname{Sin} (m-1) x}{\operatorname{Cos} x^{n-1}} \partial x - \int \frac{\operatorname{Sin} (m-2) x}{\operatorname{Cos} x^n} \partial x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Sin} m x}{\operatorname{Sin} x^n} \partial x = 2 \int \frac{\operatorname{Cos} (m-1) x}{\operatorname{Sin} x^{n-1}} \partial x + \int \frac{\operatorname{Sin} (m-2) x}{\operatorname{Sin} x^n} \partial x.$$

Tafel XV.

$$\int e^x x^m \partial x.$$

$$\int x^m e^x \partial x = x^m e^x - m\int x^{m-1} e^x \partial x \text{ (für jedes beliebige m).}$$

$$\int x^m e^x \partial x = m!\,e^x \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{(-1)^\nu x^{m-\nu}}{(m-\nu)!} \text{ (wenn m eine positive ganze Zahl ist.)}$$

$$\int x e^x \partial x = e^x(x-1). \qquad \int x^3 e^x \partial x = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6).$$

$$\int x^2 e^x \partial x = e^x(x^2 - 2x + 2) \qquad \int x^4 e^x \partial x = e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24).$$

$$\int x^m e^{kx} \partial x = \frac{1}{k} x^m e^{kx} - \frac{m}{k}\int x^{m-1} e^{kx} \partial x = \frac{1}{k^{m+1}}\int y^m e^y \partial y \text{ (für } y = kx).$$

$$\int (\log x)^m \partial x = \int y^m e^y \partial y. \quad \Big| \quad \int x^n (\log x)^m \partial x = \int y^m e^{(n+1)y} \partial y \begin{Bmatrix}\text{beide für}\\ y = \log x\end{Bmatrix}.$$

$$\int \frac{e^x \partial x}{x^m} = -\frac{e^x}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{1}{m-1}\int \frac{e^x \partial x}{x^{m-1}} \text{ (für ein beliebiges m).}$$

$$\int \frac{e^x \partial x}{x^m} = -e^x \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \frac{1}{\nu!(m-1)_\nu x^{m-\nu}} + \frac{1}{(m-1)!}\int \frac{e^x \partial x}{x} \begin{Bmatrix}\text{für m als posit.}\\ \text{ganze Zahl}\end{Bmatrix}.$$

$$\int \frac{e^x \partial x}{x^2} = -\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x \partial x}{x} \;{}^{*)}.$$

$$\int \frac{e^x \partial x}{x^3} = -\frac{1}{2} e^x \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{e^x \partial x}{x}.$$

$$\int \frac{e^x \partial x}{x^4} = -\frac{1}{3} e^x \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x}\right) + \frac{1}{6}\int \frac{e^x \partial x}{x}.$$

$$\int e^x \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{a_\nu}{x^\nu} \partial x = e^x \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{A_\nu}{x^\nu} + nA_n \int \frac{e^x \partial x}{x^{n+1}}. \left(\text{Für } A_\nu = (\nu - 1!) \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} \frac{a_\lambda}{(\lambda - 1!)}\right).$$

Ist $A_n = 0$, oder $a_1 + \frac{a_2}{1!} + \frac{a_3}{2!} + \frac{a_4}{3!} + \cdots + \frac{a_n}{(n-1)!} = 0$, so lässt sich die Integration vollziehen; z. B.

$$\int e^x \left(\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} - \frac{2(a_1 + a_2)}{x^3}\right) \partial x = e^x \left(\frac{a_1}{x} + \frac{a_1 + a_2}{x^2}\right). \quad \int \frac{x e^x \partial x}{(x+1)^2} = \frac{e^x}{x+1}.$$

*) Das Integral $\int \frac{e^x \partial x}{x}$ s. in der folgenden Abtheilung: Integrallogarithmus.

$\int x^m \operatorname{Cos} x \,\partial x, \qquad \int x^m \operatorname{Sin} x \,\partial x.$ Tafel XVI.

$$\int x^m \operatorname{Cos} x \,\partial x = x^m \operatorname{Sin} x - m\int x^{m-1} \operatorname{Sin} x \,\partial x.$$

$$\int x^m \operatorname{Sin} x \,\partial x = -x^m \operatorname{Cos} x + m\int x^{m-1} \operatorname{Cos} x \,\partial x.$$

$$\left.\begin{aligned}\int x^m \operatorname{Cos} x \,\partial x &= m!\sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{x^\nu}{\nu!} \operatorname{Cos}\left(x + \frac{m-\nu-1}{2}\pi\right)\\ \int x^m \operatorname{Sin} x \,\partial x &= m!\sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{x^\nu}{\nu!} \operatorname{Sin}\left(x + \frac{m-\nu-1}{2}\pi\right)\end{aligned}\right\} \text{für ein posit. ganzes m.}$$

$$\int x \operatorname{Cos} x \,\partial x = \operatorname{Cos} x + x \operatorname{Sin} x.$$

$$\int x^2 \operatorname{Cos} x \,\partial x = 2x \operatorname{Cos} x + (x^2 - 2)\operatorname{Sin} x.$$

$$\int x^3 \operatorname{Cos} x \,\partial x = (3x^2 - 6)\operatorname{Cos} x + (x^3 - 6x)\operatorname{Sin} x.$$

$$\int x^4 \operatorname{Cos} x \,\partial x = (4x^3 - 24x)\operatorname{Cos} x + (x^4 - 12x^2 + 24)\operatorname{Sin} x.$$

$$\int x^5 \operatorname{Cos} x \,\partial x = (5x^4 - 60x^2 + 120)\operatorname{Cos} x + (x^5 - 20x^3 + 120x)\operatorname{Sin} x.$$

$$\int x^6 \operatorname{Cos} x \,\partial x = (6x^5 - 120x^3 + 720x)\operatorname{Cos} x + (x^6 - 30x^4 + 360x^2 - 720)\operatorname{Sin} x.$$

$$\int x \operatorname{Sin} x \,\partial x = \operatorname{Sin} x - x \operatorname{Cos} x.$$

$$\int x^2 \operatorname{Sin} x \,\partial x = 2x \operatorname{Sin} x - (x^2 - 2)\operatorname{Cos} x.$$

$$\int x^3 \operatorname{Sin} x \,\partial x = (3x^2 - 6)\operatorname{Sin} x - (x^3 - 6x)\operatorname{Cos} x.$$

$$\int x^4 \operatorname{Sin} x \,\partial x = (4x^3 - 24x)\operatorname{Sin} x - (x^4 - 12x^2 + 24)\operatorname{Cos} x.$$

$$\int x^5 \operatorname{Sin} x \,\partial x = (5x^4 - 60x^2 + 120)\operatorname{Sin} x - (x^5 - 20x^3 + 120x)\operatorname{Cos} x.$$

$$\int x^6 \operatorname{Sin} x \,\partial x = (6x^5 - 120x^3 + 720x)\operatorname{Sin} x - (x^6 - 30x^4 + 360x^2 - 720)\operatorname{Cos} x.$$

Tafel XVII.

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x \,\partial x}{x^m}. \qquad \int \frac{\operatorname{Sin} x \,\partial x}{x^m}.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x \,\partial x}{x^m} = -\frac{\operatorname{Cos} x}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{m-1}\int \frac{\operatorname{Sin} x \,\partial x}{x^{m-1}}.$$

$$\int \frac{\operatorname{Sin} x \,\partial x}{x^m} = -\frac{\operatorname{Sin} x}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{1}{m-1}\int \frac{\operatorname{Cos} x \,\partial x}{x^{m-1}}.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x \,\partial x}{x^m} = -\frac{1}{(m-1)!}\sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \frac{(m-\nu-1)!}{x^{m-\nu}} \operatorname{Cos}\left(x + \frac{\nu-1}{2}\pi\right)$$
$$+ \frac{1}{(m-1)!}\int \frac{\partial x}{x} \operatorname{Cos}\left(x + \frac{m-1}{2}\pi\right).$$

$$\int \frac{\operatorname{Sin} x \,\partial x}{x^m} = -\frac{1}{(m-1)!}\sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \frac{(m-\nu-1)!}{x^{m-\nu}} \operatorname{Sin}\left(x + \frac{\nu-1}{2}\pi\right)$$
$$+ \frac{1}{(m-1)!}\int \frac{\partial x}{x} \operatorname{Sin}\left(x + \frac{m-1}{2}\pi\right).$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x \,\partial x}{x^2} = -\frac{\operatorname{Cos} x}{x} - \int \frac{\partial x}{x} \operatorname{Sin} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Sin} x \,\partial x}{x^2} = -\frac{\operatorname{Sin} x}{x} + \int \frac{\partial x}{x} \operatorname{Cos} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x \,\partial x}{x^3} = -\frac{\operatorname{Cos} x}{2x^2} + \frac{\operatorname{Sin} x}{2x} - \frac{1}{2}\int \frac{\partial x}{x} \operatorname{Cos} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Sin} x \,\partial x}{x^3} = -\frac{\operatorname{Sin} x}{2x^2} - \frac{\operatorname{Cos} x}{2x} - \frac{1}{2}\int \frac{\partial x}{x} \operatorname{Sin} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x \,\partial x}{x^4} = -\frac{\operatorname{Cos} x}{3x^3} + \frac{\operatorname{Sin} x}{6x^2} + \frac{\operatorname{Cos} x}{6x} + \frac{1}{6}\int \frac{\partial x}{x} \operatorname{Sin} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Sin} x \,\partial x}{x^4} = -\frac{\operatorname{Sin} x}{3x^3} - \frac{\operatorname{Cos} x}{6x^2} + \frac{\operatorname{Sin} x}{6x} - \frac{1}{6}\int \frac{\partial x}{x} \operatorname{Cos} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x \,\partial x}{x^5} = -\frac{\operatorname{Cos} x}{4x^4} + \frac{\operatorname{Sin} x}{12x^3} + \frac{\operatorname{Cos} x}{24x^2} - \frac{\operatorname{Sin} x}{24x} + \frac{1}{24}\int \frac{\partial x}{x} \operatorname{Cos} x.$$

$$\int \frac{\operatorname{Sin} x \,\partial x}{x^5} = -\frac{\operatorname{Sin} x}{4x^4} - \frac{\operatorname{Cos} x}{12x^3} + \frac{\operatorname{Sin} x}{24x^2} + \frac{\operatorname{Cos} x}{24x} + \frac{1}{24}\int \frac{\partial x}{x} \operatorname{Sin} x.$$

Tafel XVIII.

$$\int \frac{x\partial x}{\operatorname{Cos} x^m}. \qquad \int \frac{x\partial x}{\operatorname{Sin} x^m}.$$

Reductions-Formeln:

$$\int \frac{x\partial x}{\operatorname{Cos} x^{m+2}} = \frac{m x \operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x}{m(m+1)\operatorname{Cos} x^{m+1}} + \frac{m}{m+1}\int \frac{x\partial x}{\operatorname{Cos} x^m}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{\operatorname{Sin} x^{m+2}} = -\frac{\operatorname{Sin} x + m x \operatorname{Cos} x}{m(m+1)\operatorname{Sin} x^{m+1}} + \frac{m}{m+1}\int \frac{x\partial x}{\operatorname{Sin} x^m}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{\operatorname{Cos} x^{2n+1}} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)_\nu}{n_\nu} \cdot \frac{(2n-2\nu-1)x\operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x}{(2n-2\nu)(2n-2\nu-1)\operatorname{Cos} x^{2n-2\nu}}$$
$$+\left(n-\frac{1}{2}\right)_n \int \frac{x\partial x}{\operatorname{Cos} x}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{\operatorname{Sin} x^{2n+1}} = -\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)_\nu}{n_\nu} \cdot \frac{\operatorname{Sin} x + (2n-2\nu-1)x\operatorname{Cos} x}{(2n-2\nu)(2n-2\nu-1)\operatorname{Sin} x^{2n-2\nu}}$$
$$+\left(n-\frac{1}{2}\right)_n \int \frac{x\partial x}{\operatorname{Sin} x}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{\operatorname{Cos} x^3} = \frac{x\operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x}{2\operatorname{Cos} x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{x\partial x}{\operatorname{Cos} x}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{\operatorname{Cos} x^5} = \frac{3x\operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x}{4\cdot 3\cdot \operatorname{Cos} x^4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{x\operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x}{2\cdot 1\cdot \operatorname{Cos} x^2} + \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\int \frac{x\partial x}{\operatorname{Cos} x}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{\operatorname{Cos} x^7} = \frac{5x\operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x}{6\cdot 5\cdot \operatorname{Cos} x^6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{3x\operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x}{4\cdot 3\cdot \operatorname{Cos} x^4} + \frac{5}{8}\cdot\frac{x\operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x}{2\cdot 1\cdot \operatorname{Cos} x^2}$$
$$+\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\int \frac{x\partial x}{\operatorname{Cos} x}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{\operatorname{Sin} x^3} = -\frac{\operatorname{Sin} x + x\operatorname{Cos} x}{2\operatorname{Sin} x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{x\partial x}{\operatorname{Sin} x}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{\operatorname{Sin} x^5} = -\frac{\operatorname{Sin} x + 3x\operatorname{Cos} x}{4\cdot 3\cdot \operatorname{Sin} x^4} - \frac{3}{4}\cdot\frac{\operatorname{Sin} x + x\operatorname{Cos} x}{2\cdot 1\cdot \operatorname{Sin} x^2} + \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\int \frac{x\partial x}{\operatorname{Sin} x}.$$

$$\int \frac{x\partial x}{\operatorname{Sin} x^7} = -\frac{\operatorname{Sin} x + 5x\operatorname{Cos} x}{6\cdot 5\cdot \operatorname{Sin} x^6} - \frac{5}{6}\cdot\frac{\operatorname{Sin} x + 3x\operatorname{Cos} x}{4\cdot 3\cdot \operatorname{Sin} x^4} - \frac{5}{8}\cdot\frac{\operatorname{Sin} x + x\operatorname{Cos} x}{2\cdot 1\cdot \operatorname{Sin} x^2}$$
$$+\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\int \frac{x\partial x}{\operatorname{Sin} x}.$$

Tafel XVIII. Fortsetzung. $\int\frac{x\partial x}{\operatorname{Cos}x^m}$. $\int\frac{x\partial x}{\operatorname{Sin}x^m}$.

$$\int\frac{x\partial x}{\operatorname{Cos}x^{2n+2}} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{n_\nu}{(n+\frac{1}{2})_\nu}\cdot\frac{(2n-2\nu)x\operatorname{Sin}x-\operatorname{Cos}x}{(2n-2\nu+1)(2n-2\nu)\operatorname{Cos}x^{2n-2\nu+1}}+\frac{1}{(n+\frac{1}{2})_n}\int\frac{x\partial x}{\operatorname{Cos}x^2}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{\operatorname{Sin}x^{2n+2}} = -\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{n_\nu}{(n+\frac{1}{2})_\nu}\cdot\frac{\operatorname{Sin}x+(2n-2\nu)x\operatorname{Cos}x}{(2n-2\nu+1)(2n-2\nu)\operatorname{Sin}x^{2n-2\nu+1}}+\frac{1}{(n+\frac{1}{2})_n}\int\frac{x\partial x}{\operatorname{Sin}x^2}.$$

$$\int\frac{x\partial x}{\operatorname{Cos}x^2} = x\operatorname{Tang}x+\log\operatorname{Cos}x.$$

$$\int\frac{x\partial x}{\operatorname{Cos}x^4} = \frac{2x\operatorname{Sin}x-\operatorname{Cos}x}{6\operatorname{Cos}x^3}+\frac{2}{3}(x\operatorname{Tang}x+\log\operatorname{Cos}x).$$

$$\int\frac{x\partial x}{\operatorname{Cos}x^6} = \frac{4x\operatorname{Sin}x-\operatorname{Cos}x}{5\cdot4\cdot\operatorname{Cos}x^5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{2x\operatorname{Sin}x-\operatorname{Cos}x}{3\cdot2\cdot\operatorname{Cos}x^3}+\frac{4\cdot2}{5\cdot3}(x\operatorname{Tang}x+\log\operatorname{Cos}x).$$

$$\int\frac{x\partial x}{\operatorname{Cos}x^8} = \frac{6x\operatorname{Sin}x-\operatorname{Cos}x}{7\cdot6\cdot\operatorname{Cos}x^7}+\frac{6}{7}\cdot\frac{4x\operatorname{Sin}x-\operatorname{Cos}x}{5\cdot4\cdot\operatorname{Cos}x^5}+\frac{6\cdot4}{7\cdot5}\cdot\frac{2x\operatorname{Sin}x-\operatorname{Cos}x}{3\cdot2\cdot\operatorname{Cos}x^3}+\frac{6\cdot4\cdot2}{7\cdot5\cdot3}\left(x\operatorname{Tang}x+\log\operatorname{Cos}x\right).$$

$$\int\frac{x\partial x}{\operatorname{Sin}x^2} = -x\operatorname{Cotg}x+\log\operatorname{Sin}x.$$

$$\int\frac{x\partial x}{\operatorname{Sin}x^4} = -\frac{\operatorname{Sin}x+2x\operatorname{Cos}x}{6\operatorname{Sin}x^3}-\frac{2}{3}(x\operatorname{Cotang}x-\log\operatorname{Sin}x).$$

$$\int\frac{x\partial x}{\operatorname{Sin}x^6} = -\frac{\operatorname{Sin}x+4x\operatorname{Cos}x}{5\cdot4\cdot\operatorname{Sin}x^5}-\frac{4}{5}\cdot\frac{\operatorname{Sin}x+2x\operatorname{Cos}x}{3\cdot2\cdot\operatorname{Sin}x^3}-\frac{4\cdot2}{5\cdot3}(x\operatorname{Cotang}x-\log\operatorname{Sin}x).$$

$$\int\frac{x\partial x}{\operatorname{Sin}x^8} = -\frac{\operatorname{Sin}x+6x\operatorname{Cos}x}{7\cdot6\cdot\operatorname{Sin}x^7}-\frac{6}{7}\cdot\frac{\operatorname{Sin}x+4x\operatorname{Cos}x}{5\cdot4\cdot\operatorname{Sin}x^5}-\frac{6\cdot4}{7\cdot5}\cdot\frac{\operatorname{Sin}x+2x\operatorname{Cos}x}{3\cdot2\cdot\operatorname{Sin}x^3}-\frac{6\cdot4\cdot2}{7\cdot5\cdot3}(x\operatorname{Cotang}x-\log\operatorname{Sin}x).$$

Anm. Diese Integrationen lassen sich auf Zusatz 3. zu dem an die Spitze dieser Abtheilung gestellten Lehrsatze zurückführen. Für $\int\frac{x\partial x}{\operatorname{Cos}x^2}$ ist das dortige $\varphi = \operatorname{Tang}x$.

Eine allgemeine Formel für die Reduction von $\int x^p\operatorname{Cos}x^m\operatorname{Sin}x^n\partial x$ s. Taf. XX, unten.

Tafel XIX.

$$\int e^{\alpha x} \operatorname{Cos} x^n \partial x. \qquad \int e^{\alpha x} \operatorname{Sin} x^n \partial x.$$

$$\int e^{(\alpha+i)x} \partial x = \frac{e^{(\alpha+i)x}}{\alpha+i} = \frac{\alpha-i}{1+\alpha^2} e^{\alpha x}(\operatorname{Cos} x + i \operatorname{Sin} x). \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

$$\int e^{\alpha x} \operatorname{Cos} x \partial x = \frac{e^{\alpha x}(\operatorname{Sin} x + \alpha \operatorname{Cos} x)}{1+\alpha^2}. \qquad \int e^{\alpha x} \operatorname{Sin} x \partial x = \frac{e^{\alpha x}(\alpha \operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x)}{1+\alpha^2}.$$

$$\int e^{\alpha x} \operatorname{Cos} x^n \partial x = \frac{e^{\alpha x} \operatorname{Cos} x^{n-1}(n \operatorname{Sin} x + \alpha \operatorname{Cos} x)}{n^2+\alpha^2} + \frac{n(n-1)}{n^2+\alpha^2} \int e^{\alpha x} \operatorname{Cos} x^{n-2} \partial x.$$

$$\int e^{\alpha x} \operatorname{Sin} x^n \partial x = \frac{e^{\alpha x} \operatorname{Sin} x^{n-1}(\alpha \operatorname{Sin} x - n \operatorname{Cos} x)}{n^2+\alpha^2} + \frac{n(n-1)}{n^2+\alpha^2} \int e^{\alpha x} \operatorname{Sin} x^{n-2} \partial x.$$

$$\int e^{\alpha x} \operatorname{Cos} x^2 \partial x = \frac{e^{\alpha x} \operatorname{Cos} x(2 \operatorname{Sin} x + \alpha \operatorname{Cos} x)}{\alpha^2+4} + \frac{2 e^{\alpha x}}{\alpha(\alpha^2+4)}.$$

$$\int e^{\alpha x} \operatorname{Sin} x^2 \partial x = \frac{e^{\alpha x} \operatorname{Sin} x(\alpha \operatorname{Sin} x - 2 \operatorname{Cos} x)}{\alpha^2+4} + \frac{2 e^{\alpha x}}{\alpha(\alpha^2+4)}.$$

$$\int e^{\alpha x} \operatorname{Cos} x^3 \partial x = \frac{e^{\alpha x} \operatorname{Cos} x^2(3 \operatorname{Sin} x + \alpha \operatorname{Cos} x)}{\alpha^2+9} + \frac{6 e^{\alpha x}(\operatorname{Sin} x + \alpha \operatorname{Cos} x)}{(\alpha^2+1)(\alpha^2+9)}.$$

$$\int e^{\alpha x} \operatorname{Sin} x^3 \partial x = \frac{e^{\alpha x} \operatorname{Sin} x^2(\alpha \operatorname{Sin} x - 3 \operatorname{Cos} x)}{\alpha^2+9} + \frac{6 e^{\alpha x}(\alpha \operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x)}{(\alpha^2+1)(\alpha^2+9)}.$$

$$\int \frac{e^{\alpha x} \partial x}{\operatorname{Cos} x^n}. \qquad \int \frac{e^{\alpha x} \partial x}{\operatorname{Sin} x^n}.$$

$$\int \frac{e^{\alpha x} \partial x}{\operatorname{Cos} x^n} = -\frac{e^{\alpha x}[\alpha \operatorname{Cos} x - (n-2) \operatorname{Sin} x]}{(n-1)(n-2) \operatorname{Cos} x^{n-1}} + \frac{\alpha^2+(n-2)^2}{(n-1)(n-2)} \int \frac{e^{\alpha x} \partial x}{\operatorname{Cos} x^{n-2}}.$$

$$\int \frac{e^{\alpha x} \partial x}{\operatorname{Sin} x^n} = -\frac{e^{\alpha x}[\alpha \operatorname{Sin} x + (n-2) \operatorname{Cos} x]}{(n-1)(n-2) \operatorname{Sin} x^{n-1}} + \frac{\alpha^2+(n-2)^2}{(n-1)(n-2)} \int \frac{e^{\alpha x} \partial x}{\operatorname{Sin} x^{n-2}}.$$

Tafel XX.

$$\int e^{\alpha x}\operatorname{Cos}x^m \operatorname{Sin}x^n \partial x.$$

Reductions-Formeln.

$$\int e^{\alpha x}\operatorname{Cos}x^m \operatorname{Sin}x^n \partial x = \frac{e^{\alpha x}\operatorname{Cos}x^{m-1}\operatorname{Sin}x^n [\alpha \operatorname{Cos}x + (m+n)\operatorname{Sin}x]}{(m+n)^2+\alpha^2}$$

$$-\frac{n\alpha}{(m+n)^2+\alpha^2}\int e^{\alpha x}\operatorname{Cos}x^{m-1}\operatorname{Sin}x^{n-1}\partial x$$

$$+\frac{(m-1)(m+n)}{(m+n)^2+\alpha^2}\int e^{\alpha x}\operatorname{Cos}x^{m-2}\operatorname{Sin}x^n \partial x.$$

$$\int e^{\alpha x}\operatorname{Cos}x^m \operatorname{Sin}x^n \partial x = \frac{e^{\alpha x}\operatorname{Cos}x^m \operatorname{Sin}x^{n-1} [\alpha \operatorname{Sin}x - (m+n)\operatorname{Cos}x]}{(m+n)^2+\alpha^2}$$

$$+\frac{m\alpha}{(m+n)^2+\alpha^2}\int e^{\alpha x}\operatorname{Cos}x^{m-1}\operatorname{Sin}x^{n-1}\partial x$$

$$+\frac{(n-1)(m+n)}{(m+n)^2+\alpha^2}\int e^{\alpha x}\operatorname{Cos}x^m \operatorname{Sin}x^{n-2}\partial x.$$

$$\int e^{\alpha x}\operatorname{Cos}x^m \operatorname{Sin}x^n \partial x = \frac{e^{\alpha x}\operatorname{Cos}x^{m-1}\operatorname{Sin}x^{n-1}(\alpha \operatorname{Sin}x \operatorname{Cos}x + m \operatorname{Sin}x^2 - n \operatorname{Cos}x^2)}{(m+n)^2+\alpha^2}$$

$$+\frac{m(m-1)}{(m+n)^2+\alpha^2}\int e^{\alpha x}\operatorname{Cos}x^{m-2}\operatorname{Sin}x^n \partial x.$$

$$+\frac{n(n-1)}{(m+n)^2+\alpha^2}\int e^{\alpha x}\operatorname{Cos}x^m \operatorname{Sin}x^{n-2}\partial x.$$

$$\int e^{\alpha x}\operatorname{Cos}x^m \operatorname{Sin}x^n \partial x = \frac{e^{\alpha x}\operatorname{Cos}x^{m-1}\operatorname{Sin}x^{n-1}(\alpha \operatorname{Cos}x \operatorname{Sin}x + m \operatorname{Sin}x^2 - n \operatorname{Cos}x^2)}{(m+n)^2+\alpha^2}$$

$$+\frac{m(m-1)}{(m+n)^2+\alpha^2}\int e^{\alpha x}\operatorname{Cos}x^{m-2}\operatorname{Sin}x^{n-2}\partial x$$

$$+\frac{(n-m)(n+m-1)}{(m+n)^2+\alpha^2}\int e^{\alpha x}\operatorname{Cos}x^m \operatorname{Sin}x^{n-2}\partial x.$$

Fortsetzung von Tafel XX.

$$\int e^{\alpha x} \operatorname{Tang} x^n \partial x .$$

$$\int e^{\alpha x} \operatorname{Tang} x^n \partial x = \frac{e^{\alpha x} \operatorname{Tang} x^{n-1}}{n-1} - \frac{\alpha}{n-1} \int e^{\alpha x} \operatorname{Tang} x^{n-1} \partial x - \int e^{\alpha x} \operatorname{Tang} x^{n-2} \partial x.$$

$$\int e^{\alpha x} \operatorname{Tang} x^2 \partial x = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} (\alpha \operatorname{Tang} x - 1) - \alpha \int e^{\alpha x} \operatorname{Tang} x \partial x.$$

$$\int e^{\alpha x} \operatorname{Tang} x^3 \partial x = \frac{1}{2} e^{\alpha x} [\operatorname{Tang} x^2 - \alpha \operatorname{Tang} x + 1] + \frac{1}{2} (\alpha^2 - 2) \int e^{\alpha x} \operatorname{Tang} x \partial x.$$

$$\int e^{\alpha x} \operatorname{Tang} x^4 \partial x = \frac{e^{\alpha x}}{6\alpha} [2\alpha \operatorname{Tang} x^3 - \alpha^2 \operatorname{Tang} x^2 + \alpha(\alpha^2 - 6) \operatorname{Tang} x - \alpha^2 + 6]$$
$$- \frac{1}{6} \alpha(\alpha^2 - 8) \int e^{\alpha x} \operatorname{Tang} x \partial x.$$

Reduction von $\int x^p \operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^n \partial x.$

$$(m+n)^2 \int x^p \operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^n \partial x + p(p-1) \int x^{p-2} \operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^n \partial x$$
$$= x^{p-1} \operatorname{Cos} x^{m-1} \operatorname{Sin} x^n [p \operatorname{Cos} x + (m+n) x \operatorname{Sin} x]$$
$$- np \int x^{p-1} \operatorname{Cos} x^{m-1} \operatorname{Sin} x^{n-1} \partial x$$
$$+ (m-1)(m+n) \int x^p \operatorname{Cos} x^{m-2} \operatorname{Sin} x^n \partial x$$
$$= x^{p-1} \operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^{n-1} [p \operatorname{Sin} x - (m+n) x \operatorname{Cos} x]$$
$$+ mp \int x^{p-1} \operatorname{Cos} x^{m-1} \operatorname{Sin} x^{n-1} \partial x$$
$$+ (n-1)(m+n) \int x^p \operatorname{Cos} x^m \operatorname{Sin} x^{n-2} \partial x.$$

Vierte Abtheilung.

Tafeln einiger bestimmten Integrale und transscendenten Functionen.

Tafel I. **Bestimmte Integrale.**

a bezeichnet eine positive Grösse.

$$\int_0^1 x^{a-1}\partial x = \frac{1}{a}.$$

Durch Differentiation und Integration nach a ergeben sich hieraus folgende Integrale:

$$\int_0^1 x^{a-1}\log x\,\partial x = -\frac{1}{a^2}. \qquad \int_0^1 \frac{x^{a-1}-1}{\log x}\partial x = \log a.$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(\log x)^2\partial x = \frac{1\cdot 2}{a^3}. \qquad \int_0^1 \left(\frac{x^a-1}{\log x} - ax\right)\frac{\partial x}{x\log x} = a\log a - a.$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(\log x)^3\partial x = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{a^4}. \qquad \int_0^1 \left[\left(\frac{x^a-1}{\log x} - a\right)\frac{1}{\log x} - \frac{a^2x}{2}\right]\frac{\partial x}{x\log x} = \frac{1}{4}a^2(2\log a - 3).$$

Durch Vertauschung von x mit e^{-x} erhält man aus vorstehenden Integralen:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\partial x = \frac{1}{a}. \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-ax}}{x}\partial x = \log a.$$

$$\int_0^\infty \left(ae^{-x} - \frac{1-e^{-ax}}{x}\right)\frac{\partial x}{x} = a\log a - a. \quad \text{U. s. f.}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{Sin} x\,\partial x = \frac{1}{1+a^2}. \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{Cos} x\,\partial x = \frac{a}{1+a^2}.$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}x\operatorname{Sin} x\,\partial x = \frac{2a}{(1+a^2)^2}. \qquad \int_0^\infty e^{-ax}x\operatorname{Cos} x\,\partial x = \frac{1-a^2}{(1+a^2)^2}.$$

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{x}\operatorname{Sin} x\,\partial x = \operatorname{Arc.Tang} a. \qquad \int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{x}\operatorname{Cos} x\,\partial x = \tfrac{1}{2}\log(1+a^2).$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} x\,\partial x}{x} = \frac{\pi}{2}. \qquad \int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} kx}{x}\partial x = \pm\frac{\pi}{2};$$ das obere Zeichen gilt für ein positives, das untere für ein negatives k.

Die beiden ersten dieser Integrale folgen aus Tafel XVII, Abth. 3, die anderen aus diesen durch Differentiation und Integration nach a; das letzte linkerhand aus dem vorhergehenden für $a = \infty$.

Bestimmte Integrale. **Tafel II.**

$$i = \sqrt{-1}.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{x+e^{\beta i}} = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} a\pi} e^{(a-1)\beta i}.$$ Bedingungen: $0 < a < 1.$ $-\pi < \beta < \pi.$

Dieses Integral folgt aus dem Werthe von $\int^\infty \frac{x^{m-1}\partial x}{x^n+e^{\beta i}}$. T. LI. der ersten Abtheilung, wo m und n positive ganze Zahlen waren und $m < n$; die Integration zwischen den Grenzen 0 und ∞ vollzogen giebt:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\partial x}{x^n+e^{\beta i}} = -\frac{i}{n e^{\beta i}} \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \left[\pi - \frac{(2\nu+1)\pi+\beta}{n}\right] e^{\frac{(2\nu+1)\pi+\beta}{n} mi}.$$

Um die geforderte Summation auszuführen, bemerke man, dass für eine beliebige Grösse λ:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} e^{\nu\lambda i} = \frac{e^{n\lambda i}-1}{e^{\lambda i}-1}, \quad \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \nu e^{\nu\lambda i} = \frac{(n-1)e^{n\lambda i} - n e^{(n-1)\lambda i} + 1}{(e^{\lambda i}-1)^2} e^{\lambda i}.$$

Die zweite dieser Formeln folgt aus der ersten durch Differentiation nach λ. Wird hierauf $\lambda = \frac{2m\pi}{n}$ gesetzt, so erhält man:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} e^{\frac{2m\nu\pi i}{n}} = 0, \quad \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \nu e^{\frac{2m\nu\pi i}{n}} = \frac{n}{e^{\frac{2m\pi i}{n}}-1} = \frac{n e^{-\frac{m\pi i}{n}}}{2i \operatorname{Sin}\frac{m\pi}{n}}.$$

Folglich ist $$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\partial x}{x^n+e^{\beta i}} = \frac{2\pi i e^{\frac{(\pi+\beta)mi}{n}}}{n^2 e^{\beta i}} \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \nu e^{\frac{2m\nu\pi i}{n}} = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{e^{-\left(1-\frac{m}{n}\right)\beta i}}{\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{n}}.$$

Wird hier $x^{\frac{1}{n}}$ für x und a für $\frac{m}{n}$ eingesetzt, so folgt die obige Gleichung zunächst für jeden rationalen Werth des ächten Bruches a; man sieht aber sofort, dass sie für jeden Werth von a zwischen 0 und 1 richtig ist, da ihre beiden Seiten stetige Functionen von a darstellen, so lange a zwischen den angegebenen Grenzen bleibt. — Für $\beta = \pm\pi$ gilt die Gleichung nicht mehr; das Integral enthält in diesem Falle unter dem Zeichen $\int$ den Divisor $x-1$ und wird unendlich gross. —

Aus dem obigen Integrale werden die folgenden abgeleitet theils durch Annahme besonderer Werthe der Constanten, theils durch Differentiation und Integration nach Constanten, theils durch Combination der verschiedenen Integrale mit einander.

Tafel II. Fortsetzung

Bestimmte Integrale.

Anmerkung. c bezeichnet überall eine positive Grösse; die Einschränkungen, welchen die Werthe der übrigen Constanten unterliegen, sind neben den Formeln angegeben.

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,\partial x}{x+c} = \frac{\pi}{\text{Sin}\,a\pi}\,c^{a-1}. \qquad 0<a<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a}\,\partial x}{(x+1)(x+c)} = \frac{\pi}{\text{Sin}\,a\pi}\cdot\frac{c^a-1}{c-1}. \qquad -1<a<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\log x\,\partial x}{x+c} = \frac{\pi c^{a-1}}{\text{Sin}\,a\pi}(\log c-\pi\,\text{Cotang}\,a\pi). \qquad 0<a<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a}\log x\,\partial x}{(x+1)(x+c)} = \frac{\pi}{c-1}\,\frac{c^a\log c\,\text{Sin}\,a\pi+(1-c^a)\pi\,\text{Cos}\,a\pi}{(\text{Sin}\,a\pi)^2}. \qquad -1<a<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{\log x\,\partial x}{(x+1)(x+c)} = \frac{(\log c)^2}{2(c-1)}.$$

$$\int_0^\infty x^{a-1}\,\partial x\log\frac{(x+1)(x+c^a)}{(x+c)^2} = \frac{\pi(c^a-1)^2}{a\,\text{Sin}\,a\pi}. \qquad -1<a<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial x}{x}\log\frac{(x+1)(x+c^2)}{(x+c)^2} = (\log c)^2.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a-c^{a-b}x^b}{x-c}\,\frac{\partial x}{x} = \pi(\text{Cotang}\,b\pi-\text{Cotang}\,a\pi)c^{a-1}. \qquad 0<a<1. \quad 0<b<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a-x^b}{(x-1)(x+c)}\,\partial x = \frac{\pi}{1+c}\left(\frac{c^a-\text{Cos}\,a\pi}{\text{Sin}\,a\pi}-\frac{c^b-\text{Cos}\,b\pi}{\text{Sin}\,b\pi}\right). \qquad -1<a<1. \quad -1<b<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a-1}{(x-1)(x+c)}\,\partial x = \frac{\pi}{1+c}\left(\frac{c^a-\text{Cos}\,a\pi}{\text{Sin}\,a\pi}-\frac{\log c}{\pi}\right). \qquad -1<a<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a\log x}{x-1}\,\frac{\partial x}{x} = \left(\frac{\pi}{\text{Sin}\,a\pi}\right)^2. \qquad 0<a<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a\log x\,\partial x}{(x-1)(x+c)} = \frac{\pi}{1+c}\left[\frac{\pi+c^a(\text{Sin}\,a\pi\cdot\log c-\pi\,\text{Cos}\,a\pi)}{(\text{Sin}\,a\pi)^2}\right]. \qquad -1<a<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{\log x\,\partial x}{(x-1)(x+c)} = \frac{\pi^2+(\log c)^2}{2(1+c)}. \qquad \int_0^\infty \frac{(\log x)^2\,\partial x}{(x-1)(x+c)} = \frac{\pi^2+(\log c)^2}{6(1+c)}\log c.$$

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^3\,\partial x}{(x-1)(x+c)} = \frac{[\pi^2+(\log c)^2]^2}{24(1+c)}.$$

Fortsetzung von Tafel II.

Bestimmte Integrale.

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^4 \partial x}{(x-1)(x+c)} = \frac{[\pi^2+(\log c)^2][7\pi^2+3(\log c)^2]\log c}{360(1+c)}.$$

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^5 \partial x}{(x-1)(x+c)} = \frac{[\pi^2+(\log c)^2]^2[3\pi^2+(\log c)^2]}{720(1+c)}.$$

$$\int_0^\infty \frac{(x^a-x^{a-b})(x^b-c^b)}{(x-1)(x-c)} \partial x = \frac{\pi \operatorname{Sin} b\pi}{(c-1)\operatorname{Sin} a\pi}\left[\frac{c^{a+b}-1}{\operatorname{Sin}(a+b)\pi}+\frac{c^b-c^a}{\operatorname{Sin}(a-b)\pi}\right].$$
$$-1<a+b<1. \qquad -1<a-b<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{(x^b-c^b)(x^{-b}-1)}{(x-1)(x-c)} \partial x = \frac{2\pi(c^b-1)\operatorname{Cotang} b\pi-(c^b+1)\log c}{c-1}. \quad -1<b<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{\left(x^{\frac{b}{2}}-x^{-\frac{b}{2}}\right)^2}{(x-1)^2} \partial x = 2(1-b\pi \operatorname{Cotang} b\pi). \quad -1<b<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{(x^a-1)(x^a-c^a)}{(x-1)(x-c)} \partial x = \frac{\pi}{c-1}\left(\frac{c^{2a}-1}{\operatorname{Sin} 2a\pi}-\frac{c^a \log c}{\pi}\right). \qquad -1<2a<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a \log\frac{x}{c}\cdot \log x \partial x}{(x-1)(x-c)} = \frac{\pi^2[(c^a+1)\log c-2\pi(c^a-1)\operatorname{Cotang} a\pi]}{(c-1)(\operatorname{Sin} a\pi)^2}. \quad -1<a<1.$$

$$\int_0^\infty \frac{\log\frac{x}{c}\cdot \log x \partial x}{(x-1)(x-c)} = \frac{4\pi^2+(\log c)^2}{6(c-1)}\log c. \qquad \int_0^\infty \left(\frac{\log x}{x-1}\right)^2 \partial x = \frac{2}{3}\pi^2.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a \partial x}{x^2+2x\operatorname{Cos}\gamma+1} = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} a\pi}\cdot\frac{\operatorname{Sin} a\gamma}{\operatorname{Sin}\gamma}. \qquad -1<a<1. \qquad 0<\gamma<\pi.$$

$$\int_0^\infty x^{a-1}\partial x \log \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x\operatorname{Cos}\gamma+1}} = \frac{\pi}{a \operatorname{Sin} a\pi}(1-\operatorname{Cos} a\gamma). \qquad -1<a<1. \quad 0<\gamma<\pi.$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial x}{x}\log \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x\operatorname{Cos}\gamma+1}} = \frac{1}{2}\gamma^2. \qquad 0<\gamma<\pi.$$

Tafel III.

Bestimmte Integrale.

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} \partial x = \Gamma(a). \quad \text{(a eine positive Grösse.)}$$

Die Bezeichnung durch Γ (Gamma) ist von Legendre in seinem *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes* zuerst eingeführt worden. Die folgende Tafel enthält die Haupteigenschaften dieser transscendenten Function, welche besonders dadurch wichtig ist, dass sich viele andere Formen bestimmter Integrale auf sie zurückführen lassen. — Ausser der genannten Schrift ist über diesen Gegenstand noch zu vergleichen eine Abhandlung von L. Dirichlet in Crelle's Journal, Bd. 15, S. 258.

$$\int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{a}}} \partial x = a\Gamma(a). \quad \int_0^1 \left(\log\frac{1}{x}\right)^a \partial x = \Gamma(1+a). \quad \int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1} \partial x = \frac{\Gamma(a)}{k^a}.$$

(k positiv.)

Diese Verwandlungen folgen aus der vorangestellten Grundformel, wenn in dieser der Reihe nach x mit $x^{\frac{1}{a}}$, x mit $\log\frac{1}{x}$, x mit kx vertauscht wird.

$$\int_0^\infty e^{-x} x^a \partial x = a\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} \partial x. \quad \text{Oder:} \quad \Gamma(1+a) = a\Gamma(a).$$

Folgt aus der Gleichung $\partial(e^{-x}x^a) = ae^{-x}x^{a-1}\partial x - e^{-x}x^a\partial x$ durch Integration von $x = 0$ bis $x = \infty$.

$$\int_0^\infty e^{-x} \partial x = \Gamma(1) = 1; \quad \Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1; \quad \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!;$$

$\Gamma(4) = 3! \ldots; \quad \Gamma(n) = (n-1)!$, wenn n eine ganze Zahl ist.

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{(1+x)^{a+b}} = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad \text{(a und b positiv.)}$$

Beweis. Aus der dritten der obigen Formeln im ersten Absatze folgt, wenn $1+x>0$, durch Vertauschung von k mit $1+x$,

$$\int_0^\infty e^{-(1+x)y} y^{a+b-1} \partial y = \frac{\Gamma(a+b)}{(1+x)^{a+b}}.$$

Fortsetzung von Tafel III.

Bestimmte Integrale.

Multiplicirt man diese Gleichung mit $x^{a-1}\partial x$ und integrirt von $x = 0$ bis $x = \infty$, so kommt:

$$\Gamma(a+b)\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{(1+x)^{a+b}} = \int_0^\infty e^{-y} y^{a+b-1}\partial y \left(\int_0^\infty e^{-xy} x^{a-1}\partial x\right) = \Gamma(a)\int_0^\infty e^{-y} y^{b-1}\partial y$$

$$= \Gamma(a)\cdot\Gamma(b),\ \text{w. z. b. w.}$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\partial x = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$ Folgt aus der vorigen Formel durch Einsetzung von $\frac{x}{1-x}$ für x.

$$\Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} a\pi}.$$ (a ein ächter Bruch.)

Beweis. Aus der vorhergehenden Formel folgt für $b = 1-a$:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x} = \Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a).$$

Nach Tafel II. ist aber $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{x+1} = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} a\pi}$; also u. s. w.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\partial x = \sqrt{\pi}.$$

Beweis. Aus der vorigen Formel folgt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, d. i.

$\int_0^\infty e^{-x} x^{\frac{1}{2}-1}\partial x = \sqrt{\pi}$, oder durch Einsetzung von x^2 für x:

$\int_0^\infty e^{-x^2}\partial x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, woraus obige Formel hervorgeht.

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = a(1+a)\left(1+\frac{a}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{a}{n}\right)\cdot n^{-a} = n^{-a} a \prod_{\nu=1}^{\nu=n}\left(1+\frac{a}{\nu}\right)$$ (für $n = \infty$.) **A.**

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{q}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{q}\right)\Gamma\left(a+\frac{3}{q}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{q-1}{q}\right) = (2\pi)^{\frac{q-1}{2}} q^{\frac{1}{2}-qa}\Gamma(qa).$$ **B.**

q eine positive ganze Zahl.

Tafel III. Fortsetzung.

Bestimmte Integrale.

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi}\cdot 2^{\frac{1}{2}-2a}\cdot\Gamma(2a).\quad \Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{3}\right)$$
$$= 2\pi\cdot 3^{\frac{1}{2}-3a}\cdot\Gamma(3a).$$ (Folgt aus B. für $q=2$, $q=3$.)

Beweis von A. Es ist $\frac{\partial\Gamma(a)}{\partial a} = \Gamma'(a) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\log x\,\partial x$, und nach Tafel I. $\log x = \int_0^\infty \frac{e^{-y}-e^{-xy}}{y}\partial y$; daher

$$\Gamma'(a) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\partial x\left(\int_0^\infty\frac{e^{-y}-e^{-xy}}{y}\partial y\right) = \Gamma(a)\int_0^\infty\left(\frac{e^{-y}}{y}-\frac{1}{y(1+y)^a}\right)\partial y.$$

Dieses Integral lässt sich auch ausdrücken durch

$\int_0^\infty\left(\frac{e^{-y}}{y}-\frac{e^{-ay}}{1-e^{-y}}\right)\partial y$ (s. nachstehende Anmerkung), so dass

$$\Gamma'(a) = \Gamma(a)\int_0^\infty\left(\frac{e^{-y}}{y}-\frac{e^{-ay}}{1-e^{-y}}\right)\partial y.$$

Bezeichnet nun n eine positive ganze Zahl und setzt man

$\int_0^\infty\left[\frac{e^{-y}-e^{-ny}}{y}-\frac{e^{-ay}(1-e^{-ny})}{1-e^{-y}}\right]\partial y = S$, so kann man $\frac{1-e^{-ny}}{1-e^{-y}}$

ersetzen durch die Reihe: $1+e^{-y}+e^{-2y}+\cdots+e^{-(n-1)y}$, worauf die Integration sich vollziehen lässt. Man erhält:

$$S = \log n - \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{2+a}+\cdots+\frac{1}{n-1+a}\right).$$

Für jedes positive y und für $n=\infty$ wird aber $e^{-ny}=0$; folglich

$S = \int_0^\infty\left(\frac{e^{-y}}{y}-\frac{e^{-ay}}{1-e^{-y}}\right)\partial y = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$ (für $n=\infty$), oder:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \log n - \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{2+a}+\cdots+\frac{1}{n-1+a}\right)\ (\text{für } n=\infty),$$

mithin durch Integration:

Bestimmte Integrale. Fortsetzung von Tafel III.

(a positiv.)

$$\log\Gamma(a) = a\log n - \left[\log a + \log(1+a) + \log\left(1+\frac{a}{2}\right) + \cdots + \log\left(1+\frac{a}{n-1}\right)\right]$$

$+ \text{Const.} (n = \infty)$, oder

$$\frac{C}{\Gamma(a)} = a(1+a)\left(1+\frac{a}{2}\right)\left(1+\frac{a}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{a}{n-1}\right)n^{-a} \text{ (für } n = \infty).$$

Um die Constante C zu bestimmen, dividire man diese Gleichung mit a und setze dann $a = 0$, so wird $a\Gamma(a) = \Gamma(1+a) = \Gamma(1) = 1$, und hieraus $C = 1$. Dies stimmt mit der zu beweisenden Formel überein, da der hinzugefügte Factor $1 + \frac{a}{n}$ für $n = \infty$ der Einheit gleich ist.

Anmerkung. Es sei u eine beliebige positive Grösse, so ist

$$\int_u^\infty \left[\frac{e^{-y}}{y} - \frac{1}{y(1+y)^a}\right]\partial y = \int_u^\infty \frac{e^{-y}\partial y}{y} - \int_u^\infty \frac{\partial y}{y(1+y)^a}.$$

Man setze $z = \log(1+y)$, $v = \log(1+u)$, so wird

$$\int_u^\infty \frac{\partial y}{y(1+y)^a} = \int_v^\infty \frac{e^{-az}\partial z}{1-e^{-z}}.$$ Zur Abkürzung sei $\frac{e^{-az}}{1-e^{-z}} = Z$, so ist $\int_v^\infty Z\partial z$

$= \int_u^\infty Z\partial z + \int_v^u Z\partial z$. Denkt man sich nun u, und mithin auch $v = \log(1+u)$, als sehr kleine positive Grössen, so ist bekanntlich $u > v$ und $u - v < \frac{1}{2}u^2$. Ferner nimmt die Function Z, indem z von Null anfangend wächst, beständig ab, wobei sie immer positiv ist; es ist daher für alle z zwischen v und u, $Z < \frac{e^{-av}}{1-e^{-v}}$ oder $Z < \frac{(1+u)^{1-a}}{u}$; folglich $\int_v^u Z\partial z < \frac{(1+u)^{1-a}}{u}\int_v^u \partial z$,

oder weil $\int_v^u \partial z = u - v < \frac{1}{2}u^2$, so ist $\int_v^u Z\partial z < \frac{1}{2}u(1+u)^{1-a}$, woraus folgt, dass dieses Integral für $u = 0$ verschwindet.

Nach dem Obigen war $\int_u^\infty \left[\frac{e^{-y}}{y} - \frac{1}{y(1+y)^a}\right]\partial y = \int_u^\infty \left(\frac{e^{-y}}{y} - \frac{e^{-ay}}{1-e^{-y}}\right)\partial y$

$-\int_v^u Z\partial z$; also ergiebt sich für $u = 0$: $\int_0^\infty \left[\frac{e^{-y}}{y} - \frac{1}{y(1+y)^a}\right]\partial y = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-y}}{y} - \frac{e^{-ay}}{1-e^{-y}}\right)\partial y$, worin die oben behauptete Gleichheit besteht.

Tafel III. Fortsetzung.

Bestimmte Integrale. $\Gamma(a)$.

(a positiv.)

Beweis der Formel B. Nach Formel A. ist

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = aq(aq+q)(aq+2q)\cdots[aq+(n-1)q]\cdot\frac{n^{-a}}{(n-1)!q^n} \text{ (für } n=\infty);$$

und eben so:

$$\frac{1}{\Gamma(a+\frac{1}{q})} = (aq+1)(aq+q+1)(aq+2q+1)\cdots\cdots[aq+(n-1)q+1]\cdot\frac{n^{-a-\frac{1}{q}}}{(n-1)!q^n}.$$

$$\frac{1}{\Gamma(a+\frac{2}{q})} = (aq+2)(aq+q+2)(aq+2q+2)\cdots\cdots[aq+(n+1)q+2]\cdot\frac{n^{-a-\frac{2}{q}}}{(n-1)!q^n}.$$

. . . .

. . . .

$$\frac{1}{\Gamma(a+\frac{q-1}{q})} = (aq+q-1)(aq+2q-1)(aq+3q-1)\cdots\cdots$$

$$(aq+nq-1)\cdot\frac{n^{-a-\frac{q-1}{q}}}{(n-1)!q^n}.$$

Die Multiplication aller dieser Ausdrücke, verbunden mit der Bemerkung, dass

$$aq(aq+1)(aq+2)(aq+3)\cdots\cdots(aq+nq-1)\cdot\frac{(nq)^{-aq}}{(nq-1)!} = \frac{1}{\Gamma(aq)} \text{ (für } n=\infty),$$

liefert folgende Gleichung:

$$\frac{\Gamma(aq)}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(a+\frac{1}{q})\cdot\Gamma(a+\frac{2}{q})\cdots\Gamma(a+\frac{q-1}{q})}q^{-aq} = \frac{(nq-1)!n^{-\frac{q-1}{2}}}{[(n-1)!]^q q^{nq}} \text{ (für } n=\infty),$$

oder, wenn man zur Abkürzung den Ausdruck linkerhand mit Q bezeichnet,

$$Q = \frac{(nq)!n^{\frac{q-1}{2}}}{(n!)^q q^{nq+1}}.$$

Nun ist nach Abschnitt c. Tafel VIII dieser Abtheilung für $n=\infty$:

$$n!e^n n^{-n-\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi},$$

also auch

$$(nq)!e^{nq}(nq)^{-nq-\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi};$$

daher

$$\frac{(nq)!n^{-nq-\frac{1}{2}}q^{-nq-\frac{1}{2}}}{(n!)^q n^{-nq-\frac{q}{2}}} = \frac{(nq)!n^{\frac{q-1}{2}}}{(n!)^q q^{nq+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{q-1}}},$$

und mithin

$$Q = \frac{1}{\sqrt{q(2\pi)^{q-1}}}, \text{ w. z. b. w.}$$

Tafel IV.

Reihen zur Berechnung von $\log\Gamma(1+a)$.

(a ein ächter Bruch.)

Bezeichnungen. $C = -\Gamma'(1) = 0{,}577215664901.$

$$S_\mu = \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

$$\log\Gamma(1+a) = -Ca + (1+S_2)\frac{a^2}{2} - (1+S_3)\frac{a^3}{3} + (1+S_4)\frac{a^4}{4} - \ldots$$

$$\log\Gamma(1+a) = \tfrac{1}{2}\log\frac{a\pi}{\operatorname{Sin} a\pi} - \tfrac{1}{2}\log\frac{1+a}{1-a} + (1-C)a - S_3\frac{a^3}{3} - S_5\frac{a^5}{5} - S_7\frac{a^7}{7} - \ldots$$

Diese Reihen ergeben sich durch Entwicklung des Ausdruckes von

$$\frac{\Gamma'(1+a)}{\Gamma(1+a)} = \log n - \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{2+a} + \cdots + \frac{1}{n+a}\right) (\text{für } n = \infty)$$

nach Potenzen von a und Integration nach a, mit Hülfe der Gleichung

$$\log\Gamma(1+a) + \log\Gamma(1-a) = \log\frac{a\pi}{\operatorname{Sin} a\pi}.$$

Die Logarithmen sind natürliche; zur Verwandlung derselben in gemeine muss auf beiden Seiten mit dem Modul 0.4342944819 multiplicirt werden. Die Werthe von S_μ für ungerade μ sind folgende (*Legendre: Traité etc., tome II. p.* 432.)

$S_3 = 0.2020569032$	$S_{15} = 0.0000305882$
$S_5 = 0.0369277551$	$S_{17} = 0.0000076372$
$S_7 = 0.0083492774$	$S_{19} = 0.0000019082$
$S_9 = 0.0020083928$	$S_{21} = 0.0000004769$
$S_{11} = 0.0004941886$	$S_{23} = 0.0000001192$
$S_{13} = 0.0001227133$	$S_{25} = 0.0000000298$

U. s. w.

Tafel IV. Fortsetzung.

Tafel der Werthe von log vulg. Γ(a) von a = 1 bis a = 2, für alle Hunderttheile.

(Auszug aus der Tafel von Legendre.)

a	log vulg. Γ(a)	a	log vulg. Γ(a)	a	log vulg. Γ(a)	a	log vulg. Γ(a)
1.00	10.00000000	1.26	9.95635916	1.51	9.94772365	1.76	9.96443636
1.01	9.99752873	1.27	9.95544868	1.52	9.94794260	1.77	9.96556062
1.02	9.99512787	1.28	9.95458907	1.53	9.94820145	1.78	9.96671758
1.03	9.99279642	1.29	9.95377978	1.54	9.94849984	1.79	9.96790700
1.04	9.99053340	1.30	9.95302027	1.55	9.94883744	1.80	9.96912866
1.05	9.98833785	1.31	9.95231003	1.56	9.94921391	1.81	9.97038233
1.06	9.98620886	1.32	9.95164853	1.57	9.94962892	1.82	9.97166778
1.07	9.98414552	1.33	9.95103527	1.58	9.95008215	1.83	9.97298478
1.08	9.98214694	1.34	9.95046976	1.59	9.95057329	1.84	9.97433313
1.09	9.98021227	1.35	9.94995151	1.60	9.95110201	1.85	9.97571259
1.10	9.97834067	1.36	9.94948004	1.61	9.95166802	1.86	9.97712296
1.11	9.97653131	1.37	9.94905488	1.62	9.95227100	1.87	9.97856403
1.12	9.97478341	1.38	9.94867559	1.63	9.95291067	1.88	9.98003559
1.13	9.97309618	1.39	9.94834169	1.64	9.95358672	1.89	9.98153742
1.14	9.97146885	1.40	9.94805277	1.65	9.95429887	1.90	9.98306934
1.15	9.96990069	1.41	9.94780837	1.66	9.95504683	1.91	9.98463113
1.16	9.96839097	1.42	9.94760808	1.67	9.95583032	1.92	9.98622261
1.17	9.96693898	1.43	9.94745148	1.68	9.95664907	1.93	9.98784357
1.18	9.96554402	1.44	9.94733815	1.69	9.95750280	1.94	9.98949382
1.19	9.96420541	1.45	9.94726770	1.70	9.95839124	1.95	9.99117318
1.20	9.96292250	1.46	9.94723973	1.71	9.95931413	1.96	9.99288145
1.21	9.96169463	1.47	9.94725385	1.72	9.96027122	1.97	9.99461845
1.22	9.96052117	1.48	9.94730967	1.73	9.96126223	1.98	9.99638399
1.23	9.95940149	1.49	9.94740682	1.74	9.96228693	1.99	9.99817790
1.24	9.95833499	1.50	9.94754494	1.75	9.96334505	2.00	10.00000000
1.25	9.95732108						

Den Logarithmen ist — 10 beizufügen.

Die Function Γ(a) hat ein Minimum für $a = 1 \cdot 4616321451$, wo $\log\Gamma(a) = 0 \cdot 9472391743 - 1$, $\Gamma(a) = 0 \cdot 8856031944$, $\Gamma(1 \cdot 5) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0 \cdot 8862269254$.

(Leg. p. 436.)

Tafel V.

Einzelne bestimmte Integrale, die sich auf Γ zurückführen lassen.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\mathrm{Cos}\,x)^n\partial x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\mathrm{Sin}\,x)^n\partial x=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.\quad \text{Bedingung: } n+1>0.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\mathrm{Cos}\,x)^m(\mathrm{Sin}\,x)^n\partial x=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{m+1}{2})}{2\Gamma(\frac{m+n}{2}+1)},\quad \text{Bedgn.: } n+1>0.\ m+1>0.$$

$$\int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta i)x}x^{n-1}\partial x=\frac{\Gamma(n)}{(\alpha+\beta i)^n}.\quad \text{Bedgn. } n>0.\quad \alpha>0.\quad (i=\sqrt{-1}).$$

Beweis. Das Integral linkerhand sei $=A$, so ist

$$\frac{\partial A}{\partial\beta}=-i\int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta i)x}x^n\partial x,$$

und durch Integration der Formel:

$$\frac{i\partial(e^{-(\alpha+\beta i)x}x^n)}{\alpha+\beta i}=\frac{ine^{-(\alpha+\beta i)x}x^{n-1}\partial x}{\alpha+\beta i}-ie^{-(\alpha+\beta i)x}x^n\partial x$$

zwischen den Grenzen 0 und ∞, erhält man $\frac{\partial A}{\partial\beta}=\frac{-inA}{\alpha+\beta i}$. Aus dieser Gleichung ergiebt sich $A=\frac{\text{Const.}}{(\alpha+\beta i)^n}$, und weil für $\beta=0$, $A=\frac{\Gamma(n)}{\alpha^n}$ ist, so folgt: Const. $=\Gamma(n)$; w. z. b. w.

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}x^{n-1}\mathrm{Cos}\,\beta x\partial x=\frac{\Gamma(n)}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{n}{2}}}\mathrm{Cos}\left(n\,\mathrm{Arc.Tang}\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}x^{n-1}\mathrm{Sin}\,\beta x\partial x=\frac{\Gamma(n)}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{n}{2}}}\mathrm{Sin}\left(n\,\mathrm{Arc.Tang}\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Diese Formeln, in welchen α und n positiv sein müssen, folgen sofort aus der vorhergehenden. Arc. Tang $\frac{\beta}{\alpha}$ ist zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ zu nehmen, wenn β positiv, zwischen 0 und $-\frac{\pi}{2}$, wenn β negativ.

Tafel V. Fortsetzung.

Bestimmte Integrale.

$$\int_0^\infty x^{n-1}\operatorname{Cos} x\,\partial x = \Gamma(n)\cdot\operatorname{Cos}\frac{n\pi}{2}.\quad \int_0^\infty x^{n-1}\operatorname{Sin} x\,\partial x = \Gamma(n)\cdot\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{2}\left\{\begin{matrix}\text{Beding.}\\ 0 < n < 1\end{matrix}\right\}.$$

Beweis. $$\int_0^\infty e^{-(\alpha+i)x}x^{n-1}\partial x = \frac{\Gamma(n)}{(\alpha+i)^n}\left\{\begin{matrix}\text{für positive } \alpha \text{ und } n,\\ \text{nach dem Obigen}\end{matrix}\right\}.$$

Diese Formel bleibt noch richtig für $\alpha = 0$, wenn zugleich n ein ächter Bruch ist, während sie für $\alpha = 0$ und $n > 1$ unrichtig sein würde. Denn differentirt man den Ausdruck $e^{-xi}x^{n-1}$ und integrirt die einzelnen Glieder der erhaltenen Gleichung zwischen den Grenzen $x = 1$ und $x = \infty$, so folgt, wenn $n < 1$: $e^i = i\int_1^\infty e^{-xi}x^{n-1}\partial x + (1-n)\int_1^\infty e^{-xi}x^{n-2}\partial x.$ Da nun $\int_1^\infty x^{n-2}\partial x$ eine endliche Grösse ist, so ist es $\int_1^\infty e^{-xi}x^{n-2}\partial x$ um so mehr, folglich ist es, nach vorstehender Gleichung, auch $\int_1^\infty e^{-xi}x^{n-1}\partial x.$ Und da der übrige Theil dieses Integrals von 0 bis 1 (wegen $n < 1$) ebenfalls endlich ist, so ist überhaupt $\int_0^\infty e^{-xi}x^{n-1}\partial x$ eine bestimmte endliche Grösse, wenn n positiv und kleiner als 1 ist. — Da nun $\int_0^\infty e^{-(\alpha+i)x}x^{n-1}\partial x$ und $\frac{\Gamma(n)}{(\alpha+i)^n}$, so lange sie endliche bestimmte Grössen bleiben, auch stetige Functionen von α sind, so besteht ihre Gleichheit auch noch für $\alpha = 0$, wenn $n < 1$. Also ist $\int_0^\infty e^{-xi}x^{n-1}\partial x = \frac{\Gamma(n)}{i^n} = \Gamma(n)\cdot e^{\frac{-n\pi i}{2}}$, da i hier $= e^{\frac{\pi i}{2}}$ gesetzt werden muss. Dies giebt die obigen Formeln.

Vertauscht man x mit βx, wo β positiv ist, so kommt

$$\int_0^\infty e^{-\beta xi}x^{n-1}\partial x = \frac{\Gamma(n)}{\beta^n}e^{-\frac{n\pi i}{2}},$$

oder

$$\int_0^\infty e^{\beta xi}x^{n-1}\partial x = \frac{\Gamma(n)}{\beta^n}e^{\frac{n\pi i}{2}};$$

Fortsetzung von Tafel V.

Bestimmte Integrale.

wenn man für i, $-i$ setzt. Beide Gleichungen zusammengefasst geben

$$\int_0^\infty e^{-\beta x i} x^{n-1}\,\partial x = \frac{\Gamma(n)}{(\pm\beta)^n} e^{\mp\frac{n\pi i}{2}},$$

in welcher die oberen oder unteren Zeichen gelten, jenachdem β positiv oder negativ ist.

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Cos} x\,\partial x}{\sqrt{x}} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} x\,\partial x}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{1-x}\cdot\frac{\partial x}{x}. \qquad \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \Gamma'(1) = \int_0^1 \frac{1-x^{a-1}}{1-x}\,\partial x.$$

Beweis. Es ist $\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-x}}{x} - \frac{1}{x(1+x)^a}\right]\partial x$ (s. d. T. Beweis der Formel A.), und ein ähnlicher Ausdruck gilt für $\frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)}$. Hieraus folgt

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} = \int_0^\infty \left[\frac{1}{(1+x)^b} - \frac{1}{(1+x)^a}\right]\partial x,$$

welcher Ausdruck durch Vertauschung von x mit $\frac{1}{x} - 1$ in den obigen übergeht.

Ist a ein rationaler Bruch $= \frac{m}{n}$, so ist nach voriger Formel

$$\frac{\Gamma'\left(\frac{m}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)} = \Gamma'(1) + n\int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{n-1}}{x^n - 1}\,\partial x.$$

$$\Gamma'\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,[\Gamma'(1) - 2\log 2]. \qquad \Gamma'\left(\tfrac{1}{3}\right) = \Gamma\left(\tfrac{1}{3}\right)\left[\Gamma'(1) - \tfrac{3}{2}\log 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right].$$

Tafel VI. Bestimmte Integrale.

a und b positiv.

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cdot \partial x}{x(b^2+x^2)} = \frac{\pi}{2b^2}(1-e^{-ab}). \qquad \int_0^\infty \frac{\cos ax \cdot \partial x}{b^2+x^2} = \frac{\pi}{2b}e^{-ab}.$$

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x^2(b^2+x^2)}\partial x = \frac{\pi}{2b^2}\left(a-\frac{1-e^{-ab}}{b}\right).$$

Beweis. Bezeichnet man das erste dieser Integrale mit z, und differentiirt es zweimal nach a, so kommt:

$-\frac{\partial^2 z}{\partial a^2} = \int_0^\infty \frac{\sin ax \cdot x\partial x}{b^2+x^2}$. Zu dieser Gleichung addire man $b^2 z$

$= b^2\int_0^\infty \frac{\sin ax \cdot \partial x}{x(b^2+x^2)}$, so folgt: $b^2 z - \frac{\partial^2 z}{\partial a^2} = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\partial x = \frac{\pi}{2}$ (nach Tafel I. d. Abth.), oder wenn $b^2 z - \frac{\pi}{2} = b^2 u$ gesetzt wird: $\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} = b^2 u$, oder wenn auf beiden Seiten mit $2\partial u$ multiplicirt und integrirt wird: $\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)^2 = b^2 u^2 + \text{Const.}$ Für $a = 0$ ist $u = -\frac{\pi}{2b^2}$, $\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\pi}{2b}$, daher Const. $= 0$, und $\frac{\partial u}{\partial a} = \pm bu$, oder $u = C \cdot e^{\pm ba}$, wo das Vorzeichen noch zu bestimmen ist. Da aber der Werth von u für ein noch so grosses a nicht unendlich werden kann, und da a und b positiv sind, so kann nur das negative Zeichen gelten; also $u = C \cdot e^{-ba}$, oder mit Rücksicht auf den Werth von u für $a = 0$, $u = -\frac{\pi}{2b^2}e^{-ba}$, $z = \frac{\pi}{2b^2}(1-e^{-ba})$, wie oben.

Die beiden anderen Integrale ergeben sich durch Differentiation und Integration des vorigen nach a. Das zweite giebt auch:

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{axi}\partial x}{b^2+x^2} = \frac{\pi}{b}e^{-ab}$, oder auch $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\pm axi}\partial x}{b^2+x^2} = \frac{\pi}{b}e^{-ab}$, wo a und b positiv sind.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-axi}\partial x}{(c+xi)^n(b^2+x^2)} = \frac{\pi}{b}\frac{e^{-ab}}{(c+b)^n}. \quad \text{(a, b, c und n positiv.)}$$

Beweis. Es ist $\frac{\Gamma(n)}{(c+yi)^n} = \int_0^\infty e^{-(c+yi)x}x^{n-1}\partial x$. Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $\frac{e^{-ayi}\partial y}{b^2+y^2}$ und integrirt von $y = 0$ bis $y = \infty$, so kommt die aufgestellte Formel heraus.

Tafel VII.

$$\int \frac{\partial x}{\log \frac{1}{x}} \text{ (Integral-Logarithmus).}$$

Verwandlung. $\int_0^x \frac{\partial x}{\log \frac{1}{x}} = \int_y^\infty \frac{e^{-y}\partial y}{y}$ für $y = \log \frac{1}{x}$.

Anmerkung. Die obere Grenze x des vorstehenden Integrals muss positiv sein, wenn dasselbe einen reellen Werth haben soll; auch muss alsdann unter $\log \frac{1}{x}$ nur der relle Werth dieses Ausdruckes verstanden werden. Ferner muss $x < 1$ sein, da überhaupt das Integral $\int \frac{\partial x}{\log \frac{1}{x}}$ allemal dann, wenn der Werth $x = 1$ zwischen den Grenzen der Integration liegt, gar keinen bestimmten Werth hat.

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}\partial x}{x} = C - \log x + x - \frac{x^2}{2!2} + \frac{x^3}{3!3} - \frac{x^4}{4!4} + \frac{x^5}{5!5} - \dots\dots \text{ in inf.}$$

Diese aus der Entwickelung von e^{-x} hervorgehende Reihe gilt für jedes positive x; nur die Bestimmung der Constante macht einige Schwierigkeit. Um zu dieser Bestimmung zu gelangen, bemerke man, dass

$$\int_0^x \frac{1-e^{-x}}{x}\partial x = x - \frac{x^2}{2!2} + \frac{x^3}{3!3} - \frac{x^4}{4!4} + \dots \text{ in inf.}$$

also:
$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}\partial x}{x} = C - \log x + \int_0^x \frac{1-e^{-x}}{x}\partial x$$

oder, wenn hier $x = 1$ gesetzt wird: $C = \int_1^\infty \frac{e^{-x}\partial x}{x} - \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\partial x$.

Bezeichnet u einen beliebigen positiven ächten Bruch, so ist

$\int_u^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\partial x = \int_u^1 \frac{\partial x}{x} - \int_u^1 \frac{e^{-x}\partial x}{x}$. Wird nun $x = 1 - e^{-y}$ und $u = 1 - e^{-v}$ gesetzt, so kommt $\int_u^1 \frac{\partial x}{x} = \int_v^\infty \frac{e^{-y}\partial y}{1-e^{-y}} = \int_u^\infty \frac{e^{-y}\partial y}{1-e^{-y}} + \log\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)$;

daher erhält man $C = \int_u^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)\partial x - \log\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)$ für $u = 0$; mithin

Tafel VII. Fortsetzung.

$$\int \frac{\partial x}{\log \frac{1}{x}} \text{ (Integral-Logarithmus.)}$$

$$C = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)\partial x.$$ Nach Tafel III. ist dieses Integral $= \Gamma'(1)$, also

$$C = \Gamma'(1) = \log n - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \text{ für } n = \infty.$$

Dieser Ausdruck der Constante ist seiner Form wegen bemerkenswerth, aber zur Berechnung wenig geeignet; einen brauchbareren s. T. VIII. Der Werth der Constante ist $C = -0,5772156649 \cdots = \Gamma'(1)$.

$$\int_0^x \frac{\partial x}{\log \frac{1}{x}} = C - \log\left(\log \frac{1}{x}\right) - \log x - \frac{(\log x)^2}{2!2} - \frac{(\log x)^3}{3!3} - \frac{(\log x)^4}{4!4} - \cdots$$

Bedingung: $0 < x < 1$. Die Constante $C = \Gamma'(1)$ wie vorhin.

Diese Reihe folgt aus der obigen durch Vertauschung von x mit $\log \frac{1}{x}$.

Tafel VIII.

Summation der Progressionen.

Allgemeine Summationsformel. (S. Jacobi in Crelles Journal. Bd. XII. S. 263.)

Lehrsatz. Bezeichnet man die Summe

$$f(a) + f(a+k) + f(a+2k) + \cdots + f[a+(\nu-1)k]$$

durch $\sum_a^{a+\nu k} f(x)$, oder $a + \nu k = x$ gesetzt, durch $\sum_a^x f(x)$ und setzt:

$$\varphi(x) = f(x) + \alpha_1 k f'(x) + \alpha_2 k^2 f''(x) + \cdots + \alpha_{n-1} k^{n-1} f^{n-1}(x).$$

ferner: $$T_n = \frac{(k-t)^n}{n!} + \frac{\alpha_1 k (k-t)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\alpha_2 k^2 (k-t)^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + \alpha_{n-1} k^{n-1}(k-t).$$

wo die Zahlen-Coëfficienten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{n-1}$ auf nachher anzugebende Weise bestimmt werden; so erhält man für die Summe

$$\sum_a^x f'(x) = f'(a) + f'(a+k) + f'(a+2k) + \cdots + f'(x-k)$$

Fortsetzung von Tafel VIII.

Summation der Progressionen.

den nachstehenden Ausdruk, nämlich:

$$k\sum_a^x f'(x) + \int_0^k T_n \sum_a^x f^{n+1}(x+t)\partial t = \varphi(x) - \varphi(a).$$

Die Coëfficienten sind: $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{3!\,2}$, $\alpha_4 = -\frac{1}{5!\,6}$, $\alpha_6 = \frac{1}{7!\,6}$,

$\alpha_8 = -\frac{1}{9!}\cdot\frac{3}{10}$, $\alpha_{10} = \frac{1}{11!}\cdot\frac{5}{6}$, $\alpha_{12} = -\frac{1}{13!}\cdot\frac{691}{210}$, $\alpha_{14} = \frac{1}{15!\,70}$,

$\alpha_{16} = -\frac{1}{17!}\cdot\frac{3617}{30}$, u. s. f.; alle Coëfficienten mit ungeraden Zeigern von 3 an, nämlich α_3, α_5, α_7, ····· sind Null. Ein beliebiger Coëfficient α_μ wird aus den ihm vorhergehenden bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{1}{(\mu+1)!} + \frac{\alpha_1}{\mu!} + \frac{\alpha_2}{(\mu-1)!} + \frac{\alpha_3}{(\mu-2)!} + \cdots + \frac{\alpha_{\mu-1}}{2} + \alpha_\mu = 0.$$

Beweis. Man setze

$$f(z) - [f(x) + (z-x)f'x + \frac{(z-x)^2}{2}f''(x) + \cdots + \frac{(z-x)^n}{n!}f^n(x)] = \varphi(x)$$

und nehme auf beiden Seiten die Ableitungen nach x, z als constant betrachtend, so erhält man:

$$\varphi'(x) = -\frac{(z-x)^n}{n!}f^{n+1}(x),$$

folglich, da $\varphi(z) = 0$,

$$\varphi(x) = \int_x^z \frac{(z-y)^n}{n!}f^{n+1}(y)\partial y,$$

wenn zur Unterscheidung von den Grenzwerthen die Veränderliche unter dem Integralzeichen mit y bezeichnet wird. Setzt man nun $y = x + t$ und $z - x = k$, so wird

$$\varphi(x) = \int_0^k \frac{(k-t)^n}{n!}f^{n+1}(x+t)\partial t\ ; \quad \text{also ist:}$$

$$f(x+k) - f(x) = k f'(x) + \frac{k^2}{2}f''(x) + \cdots + \frac{k^n}{n!}f^n(x) + \int_0^k \frac{(k+t)^n}{n!}f^{n+1}(x+t)\partial t.$$

Tafel VIII. Fortsetzung.

Summation der Progressionen.

Setzt man in diese Gleichung für x nach und nach die Werthe a, a+k, a+2k, ... $a+(\nu-1)k = x-k$, so entstehen ν Gleichungen, aus deren Summation folgende Gleichung hervorgeht:

$$f(x)-f(a) = k\sum_a^x f'(x) + \frac{k^2}{2!}\sum_a^x f''(x) + \frac{k^3}{3!}\sum_a^x f'''(x) + \cdots + \frac{k^n}{n!}\sum_a^x f^n(x)$$

$$+\int_0^k \frac{(k-t)^n}{n!}\sum_a^x f^{n+1}(x+t)\,\partial t.$$

Vertauscht man der Reihe nach f(x) mit f'(x), n mit n−1, sodann f(x) mit f''(x), n mit n−2, u. s. f., so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$f'(x)-f'(a) = k\sum_a^x f''(x) + \frac{k^2}{2!}\sum_a^x f'''(x) + \cdots + \frac{k^{n-1}}{(n-1)!}\sum_a^x f^n(x)$$

$$+\int_0^k \frac{(k-t)^{n-1}}{(n-t)!}\sum_a^x f^{n+1}(x+t)\,\partial t.$$

$$f''(x)-f''(a) = k\sum_a^x f'''(x) + \cdots + \frac{k^{n-2}}{(n-2)!}\sum_a^x f^n(x) + \int_0^k \frac{(k-t)^{n-2}}{(n-2)!}\sum_a^x f^{n+1}(n+t)\,\partial t.$$

. . . .

$$f^{n-1}(x)-f^{n-1}(a) = k\sum_a^x f^n(x) + \int_0^k (k-t)\sum_a^x f^{n+1}(x+t)\,\partial t.$$

Von diesen Gleichungen multiplicire man die erste — die für f(x) − f(a) — mit 1, die zweite mit $\alpha_1 k$, die dritte mit $\alpha_2 k^2$, u. s. f., die letzte mit $\alpha_{n-1}k^{n-1}$, bestimme die Coëfficienten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ durch die Gleichungen $\alpha_1 + \frac{1}{2} = 0$, $\alpha_2 + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{1}{3!} = 0$, u. s. w., wie oben angegeben, und addire die Producte; so fallen die Summen $\sum f''(x)$, ... $\sum f^n(x)$ alle heraus, und man erhält die im Lehrsatze aufgestellte Gleichung.

Zusatz. Die im Lehrsatze mit $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ bezeichneten Coëfficienten sind die der Entwickelung

$$\frac{1}{e^h-1} = \frac{1}{h} + \alpha_1 + \alpha_2 h + \alpha_3 h^2 + \alpha_4 h^3 + \cdots$$

Fortsetzung von Tafel VIII.

Summation der Progressionen.

wovon man sich durch Multiplication mit $e^h - 1 = h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots$ überzeugt; und da $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, so hat man:

$$\frac{1}{2} h + \frac{h}{e^h - 1} = 1 + \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3 + \alpha_4 h^4 + \dots$$

$$= \frac{1}{2} h \left[\frac{e^{\frac{1}{2}h} + e^{-\frac{1}{2}h}}{e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h}} \right] = \frac{1}{2} h \, \mathrm{Cotang} \frac{h}{2}.$$

Da der letzte Ausdruck durch Vertauschung von h mit $-$h nicht geändert wird, so müssen in der Entwicklung die ungeraden Potenzen wegfallen, also ist $\alpha_3 = 0$, $\alpha_5 = 0$, u. s. f. Multiplicirt man die Gleichung

$$\frac{1}{2} h \, \mathrm{Cotang} \frac{h}{2} = 1 + \alpha_2 h^2 + \alpha_4 h^4 + \alpha_6 h^6 + \dots$$

auf beiden Seiten mit $\frac{\partial h}{h}$, und integrirt von $h = 0$ bis $h = h$, so folgt:

$$\log \left(\frac{2 \, \mathrm{Sin} \frac{h}{2}}{h} \right) = \frac{\alpha_2 h^2}{2} + \frac{\alpha_4 h^4}{4} + \frac{\alpha_6 h^6}{6} + \dots$$

Bekanntlich aber ist

$$\mathrm{Sin} \frac{h}{2} = \frac{h}{2} \left(1 + \frac{h^2}{2^2 \pi^2} \right) \left(1 + \frac{h^2}{4^2 \pi^2} \right) \dots \dots \left(1 + \frac{h^2}{(2\mu\pi)^2} \right) \dots \text{ in inf.,}$$

also ist

$$\frac{1}{2} \alpha_2 h^2 + \frac{1}{4} \alpha_4 h^4 + \frac{1}{6} \alpha_6 h^6 + \dots = \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \log \left(1 + \frac{h^2}{(2\mu\pi)^2} \right)$$

$$= h^2 \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{1}{(2\mu\pi)^2} - \frac{1}{2} h^4 \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{1}{(2\mu\pi)^4} + \dots,$$

daher ist

$$\frac{1}{2} \alpha_2 = \frac{1}{4\pi^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right),$$

$$-\frac{1}{2} \alpha_4 = \frac{1}{2^4 \pi^4} \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots \right),$$

und allgemein:

$$(-1)^{\mu-1} \cdot \frac{1}{2} \alpha_{2\mu} = \frac{1}{(2\pi)^{2\mu}} \left(1 + \frac{1}{2^{2\mu}} + \frac{1}{3^{2\mu}} + \frac{4}{4^{2\mu}} + \dots \right).$$

Tafel VIII. Fortsetzung.

Summation der Progressionen.

Anwendungen der Allgemeinen Formel.

a). Summation der positiven ganzen Potenzen der ganzen Zahlen.
(x und n positive ganze Zahlen.)

$$\sum_1^x \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{x^n}{n!} + \frac{\alpha_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\alpha_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots\cdots + \alpha_{n-1} x.$$

$$\sum_1^x x = \frac{x(x-1)}{2}.$$

$$\sum_1^x x^2 = \frac{1}{6} x(x-1)(2x-1).$$

$$\sum_1^x x^3 = \frac{1}{4} x^2(x-1)^2.$$

$$\sum_1^x x^4 = \frac{1}{30} x(x-1)(2x-1)(3x^2-3x-1).$$

$$\sum_1^x x^5 = \frac{1}{12} x^2(x-1)^2(2x^2-2x-1).$$

$$\sum_1^x x^6 = \frac{1}{42} x(x-1)(2x-1)(3x^4-6x^3+3x+1).$$

$$\sum_1^x x^7 = \frac{1}{24} x^2(x-1)^2(3x^4-6x^3-x^2+4x+2).$$

$$\sum_1^x x^8 = \frac{1}{90} x(x-1)(2x-1)(5x^6-15x^5+5x^4+15x^3-x^2-9x-3).$$

$$\sum_1^x x^9 = \frac{1}{20} x^2(x-1)^2(2x^6-6x^5+x^4+8x^3+x^2-6x-3).$$

$$\sum_1^x x^{10} = \frac{1}{66} x(x-1)(2x-1)(3x^8-12x^7+8x^6+18x^5-10x^4-24x^3+2x^2 + 15x+5).$$

Anm. Setzt man k = 1, so ist nach dem Lehrsatze:

$$T_n = \frac{(1-t)^n}{n!} + \frac{\alpha_1(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\alpha_2(1-t)^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + \alpha_{n-1}(1-t);$$

d. h. schreibt man in dem vorstehenden Ausdrucke für

$$\sum_1^x \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

statt x, $1-t$, so geht er in T_n über.

Fortsetzung von Tafel VIII.

Summation der Progressionen.

Anwendungen der allgemeinen Formel.

b) Summation der Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots\dots\dots+\frac{1}{x-1}=\sum_1^x\frac{1}{x}$.

Es sei $\varphi(x)=\log x+\frac{\alpha_1}{x}-\frac{\alpha_2}{x^2}\dots\dots+\frac{\alpha_{n-1}(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}$, so wird nach dem Lehrsatze

$$\sum_1^x\frac{1}{x}=\varphi(x)-\varphi(1)-(-1)^n\int_0^1 n!\,T_n\,\partial t\sum_1^x\frac{1}{(x+t)^{n+1}}.$$

Schreibt man auf der rechten Seite $\sum_1^\infty\frac{1}{(x+t)^{n+1}}-\sum_x^\infty\frac{1}{(x+t)^{n+1}}$ für $\sum_1^x\frac{1}{(x+t)^{n+1}}$, und bemerkt, dass das erste der alsdann entstehenden Integrale sich mit $-\varphi(1)$ in eine Constante zusammenzieht, so folgt hieraus:

$$\sum_1^x\frac{1}{x}=\varphi(x)+C+(-1)^n\int_0^1 n!\,T_n\,\partial t\sum_x^\infty\frac{1}{(x+t)^{n+1}}=\varphi(x)+C+R,$$

wenn das zuletzt stehende Integral, welches den Rest ausdrückt, mit R bezeichnet wird. Für ein gegebenes n nähert sich R der Null, wenn x sehr gross wird, und man erhält für $x=\infty$, $\sum_1^x\frac{1}{x}=\log x+C$, also $C=-\Gamma'(1)$; nach T. III. Formel A. Mit Hülfe der obigen genauen Formel lässt sich C schon durch Anwendung eines sehr mässigen Werthes von x berechnen. Man findet für $n=4$:

$$\sum_1^x\frac{1}{x}=\log x-\frac{1}{2x}-\frac{1}{12x^2}+C+\int_0^1 t^2(1-t)^2\,\partial t\sum_x^\infty\frac{1}{(x+t)^5};$$

für $n=6$: $\sum_1^x\frac{1}{x}=\log x-\frac{1}{2x}-\frac{1}{12x^2}+\frac{1}{120x^4}+C$

$$+\int_0^1 t^2(1-t)^2(t^2-t-\tfrac{1}{2})\,\partial t\sum_x^\infty\frac{1}{(x+t)^7}.$$

Aus diesen Formeln lässt sich der Betrag des Restes für ein gegebenes x, z. B. für $x=10$ oder $x=20$, für welches die Summe $\sum_1^x\frac{1}{x}$ noch leicht zu berechnen ist, und mithin auch der durch Weglassung des Restes bei der Bestimmung von C begangene Fehler beurtheilen. Den Werth von $\Gamma'(1)$ s. T. VII.

Tafel VIII. Fortsetzung.

Summation der Progressionen.

Anwendungen der allgemeinen Formel.

$$\sum_1^x \frac{1}{x+a} = \varphi(x) - \frac{\Gamma'(1+a)}{\Gamma(1+a)} + R. \quad \varphi(x) = \log(x+a) - \frac{1}{2(x+a)} - \frac{\alpha_2}{(x+a)^2} \cdots$$

$$\cdots + \frac{\alpha_{n-1}(-1)^{n-2}(n-2)!}{(x+a)^{n-1}}. \quad R = (-1)^n \int_0^1 n!\,T_n\,\partial t \sum_x^\infty \frac{1}{(x+a+t)^{n+1}}.$$

c) $f'(x) = \log(x+a)$. $\quad \varphi(x) = (x+a)\log(x+a) - x - \frac{1}{2}\log(x+a)$

$$+ \frac{\alpha_2}{x+a} + \frac{2\alpha_4}{(x+a)^3} \cdots + \frac{(-1)^{n-1}\alpha_{n-1}(n-3)!}{(x+a)^{n-2}}.$$

$$\sum_1^x \log(x+a) = \varphi(x) + C + R. \quad R = (-1)^{n+1}\int_0^1 (n-1)!\,T^n\,\partial t \sum_x^\infty \frac{1}{(x+a+t)^n}.$$

Diese Formel folgt aus der allgemeinen Summationsformel, wenn man noch, wie im vorigen Beispiele, $\sum_1^x \frac{1}{(x+a+t)^n}$ in die Differenz der Summen von 1 bis ∞ und von x bis ∞ zerlegt, und das aus dem ersten Theile entstehende Integral mit der Constanten vereinigt. Auch hier wird bei gegebenem n für ein sehr grosses x, $R = 0$ und:

$$\sum_1^x \log(x+a) = (x+a)\log(x+a) - x - \tfrac{1}{2}\log(x+a) + C \text{ (für } x = \infty);$$

wo noch die Constante zu finden ist. Man hat für $x = \infty$:

$\sum_1^x \log(x+a) = \sum_1^x \log x + a\log x - \log\Gamma(1+a)$, zufolge der in T. III. entwickelten Eigenschaften der Function Γ; ferner ist für $x = \infty$, $(x+a)\log(x+a) = (x+a)\log x + a$, $\log(x+a) = \log x$; folglich:

$$\sum_1^x \log x - \log\Gamma(1+a) = (x-\tfrac{1}{2})\log x + a - x + C \text{ (für } x = \infty),$$

oder, wenn man $C + a + \log\Gamma(1+a) = C'$ setzt:

$$\sum_1^x \log x = (x-\tfrac{1}{2})\log x - x + C' \text{ (für } x = \infty).$$

Die Constante C' ist unabhängig von a. Um sie zu finden, benutze man den Werth von $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, wonach:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \cdots 2x-1\cdot 2x}{(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots 2x)^2}\sqrt{x} = \frac{(2x)!\sqrt{x}}{2^{2x}\cdot(x!)^2} \text{ für } (x = \infty).$$

Fortsetzung von Tafel VIII.

Summation der Progressionen.

Anwendungen der allgemeinen Formel.

Man hat, mit Anwendung der vorstehenden Formel für $\sum^x \log x = \log(x-1)!$,

$$-\tfrac{1}{2}\log\pi = \sum_1^{2x}\log x - 2\sum_1^x \log x - 2x\log 2 - \tfrac{1}{2}\log x + \log 2 = (2x-\tfrac{1}{2})\log 2x$$

$$-2x + C' - (2x-1)\log x + 2x - 2C' - 2x\log 2 - \tfrac{1}{2}\log x + \log 2,$$

woraus nach geschehener Reduction hervorgeht: $C' = \tfrac{1}{2}\log 2\pi$; folglich $C = \tfrac{1}{2}\log 2\pi - a - \log\Gamma(1+a)$. Also ist:

$$\sum_1^x \log(x+a) = \tfrac{1}{2}\log 2\pi - a - \log\Gamma(1+a) + (x+a-\tfrac{1}{2})\log(x+a) - x$$

$$+\frac{\alpha_2}{x+a} + \cdots\cdots + \frac{(-1)^{n-1}\alpha_{n-1}(n-3)!}{(x+a)^{n-2}} + R,$$

oder, wenn man die Logarithmen wegschafft, und auf beiden Seiten den Factor $x+a$ hinzufügt, so erhält man folgende Formel:

$$(1+a)(2+a)(3+a)\cdots\cdots(x+a)$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1+a)}(x+a)^{x+a+\frac{1}{2}} e^{-x-a+\frac{1}{12(x+a)}-\frac{1}{360(x+a)^3}\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}\alpha_{n-1}(n-3)!}{(x+a)^{n-2}}} \cdot e^R,$$

wo R das oben angegebene Integral ist. Z. B. für $n = 2$ findet man:

$$a(1+a)(2+a)(3+a)\cdots\cdots(x+a)$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(a)}(x+a)^{x+a+\frac{1}{2}} \cdot e^{-x-a} \cdot e^{\int_0^1 \frac{t(1-t)}{2}\partial t \sum_x^\infty \frac{1}{(x+a+t)^2}}.$$

Daher für $x = \infty$:

$$\frac{a(1+a)(2+a)\cdots\cdots(x+a)e^x}{(x+a)^{x+a+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{e^a\Gamma(a)}. \qquad x!\,x^{-x-\frac{1}{2}}e^x = \sqrt{2\pi}.$$

Fünfte Abtheilung.

Elliptische Functionen.

(Nach Legendre, Traité des fonctions elliptiques etc., tome I. Paris, 1825.)

Tafel I.

$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4.$$

(α, β, γ, δ, ε reelle Zahlenwerthe.)

Verwandlung von $\frac{\partial x}{\sqrt{X}}$ in $\frac{\partial y}{\sqrt{A + By^2 + Cy^4}}$.

Es seien a, b, c, d die vier, als ungleich vorausgesetzten, Wurzeln der Gleichuug $X = 0$, und zwar sei, wenn alle vier Wurzeln reell sind, $a > b > c > d$; wenn aber nicht alle Wurzeln reell sind, so verstehe man unter a und b zwei zusammengehörige imaginäre Wurzeln. Man bestimme die Grössen p und q aus den Gleichungen:

$$\frac{p+q}{2} = \frac{ab - cd}{a + b - c - d}, \quad \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = \frac{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}{(a+b-c-d)^2}$$

und setze:

$$x = \frac{p + qy}{1 + y}$$

so wird

$$X = \frac{A + By^2 + Cy^4}{(1+y)^4}$$

und

$$\frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{(q-p)\partial y}{\sqrt{A + By^2 + Cy^4}}$$

d. h. durch diese Substitution verwandelt sich der Ausdruck $\frac{\partial x}{\sqrt{X}}$ in einen ähnlichen, welchem die ungeraden Potenzen der veränderlichen Grösse fehlen.

Anmerkung 1. Für p, q, A, B, C werden nach dieser Regel stets reelle Werthe gefunden, die auch endlich sind, wenn nicht $a + b = c + d$ ist. Wenn aber $a + b = c + d = 2m$ ist, so ist

$$X = \varepsilon(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = \varepsilon(x^2 - 2mx + ab)(x^2 - 2mx + cd);$$

setzt man daher $x - m = y$, so wird die verlangte Verwandlung sofort erhalten durch die Formel:

$$\frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{\partial y}{\sqrt{\varepsilon(y^2 + ab - m^2)(y^2 + cd - m^2)}}.$$

Anmerkung 2. Die obige Substitution $x = \frac{p + qy}{1 + y}$ ist auch noch anwendbar, wenn X nur auf den dritten Grad steigt, also $\varepsilon = 0$ ist. Setzt man für diesen Fall in den obigen Ausdrücken $d = \infty$, so kommt $q + p = 2c$, $q - p = 2\sqrt{(a-c)(b-c)} = 2k$ und

$$\frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{2\sqrt{k}\,\partial y}{\sqrt{\delta(m + ny^2)(y^2 - 1)}},$$

wo $m = (c - a - k)(c - b - k)$ und $n = (c - a + k)(c - b + k)$.

Tafel II.

$$X = A + Bx^2 + Cx^4$$

(A, B, C reelle Zahlenwerthe.)

Verwandlung von $\frac{\partial x}{\sqrt{X}}$ in $\frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{Sin} \varphi^2}}$, wo der Modul c ein positiver, ächter Bruch ist.

Man zerlege X in reelle Factoren zweiten Grades; es sei $X = \pm \gamma^2 (1 \pm \alpha^2 x^2)(1 \pm \beta^2 x^2)$, α, β, γ reelle Constanten; ferner sei $\alpha^2 > \beta^2$, und es werde $\beta = k\alpha$, $\alpha x = y$ gesetzt; so wird $k^2 < 1$ und

$$\frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{\partial y}{\alpha \gamma \sqrt{\pm (1 \pm y^2)(1 \pm k^2 y^2)}}.$$

Es ergeben sich daher folgende Fälle, in welchen die gesuchte Verwandlung auf die beigefügte Weise erhalten wird:

1) $$\frac{\partial x}{\sqrt{(1 + x^2)(1 + k^2 x^2)}} = \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{Sin} \varphi^2}}. \quad c = \sqrt{1 - k^2}, \quad x = \operatorname{Tang} \varphi.$$

2) $$\frac{\partial x}{\sqrt{(1 - x^2)(1 + k^2 x^2)}} = \frac{-\sqrt{1 - c^2} \cdot \partial \varphi}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{Sin} \varphi^2}}. \quad c = \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad x = \operatorname{Cos} \varphi.$$

3) $$\frac{\partial x}{\sqrt{(x^2 - 1)(1 + k^2 x^2)}} = \frac{c\,\partial \varphi}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{Sin} \varphi^2}}. \quad c = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad x = \frac{1}{\operatorname{Cos} \varphi}.$$

4) $$\frac{\partial x}{\sqrt{(1 + x^2)(1 - k^2 x^2)}} = \frac{-c\,\partial \varphi}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{Sin} \varphi^2}}. \quad c = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad x = \frac{\operatorname{Cos} \varphi}{k}.$$

5) $$\frac{\partial x}{\sqrt{(1 + x^2)(k^2 x^2 - 1)}} = \frac{\sqrt{1 - c^2} \cdot \partial \varphi}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{Sin} \varphi^2}}. \quad c = \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad x = \frac{1}{k \operatorname{Cos} \varphi}.$$

6) $$\frac{\partial x}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{Sin} \varphi^2}}. \quad c = k, \begin{cases} x = \operatorname{Sin} \varphi, & \text{wenn } x^2 < 1. \\ x = \frac{1}{k \operatorname{Sin} \varphi}, & \text{wenn } x^2 > \frac{1}{k}. \end{cases}$$

7) $$\frac{\partial x}{\sqrt{(x^2 - 1)(1 - k^2 x^2)}} = -\frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{Sin} \varphi^2}}. \quad c = \sqrt{1 - k^2},$$

$$x^2 = \operatorname{Sin} \varphi^2 + \frac{1}{k^2} \operatorname{Cos} \varphi^2 = \frac{1 - c^2 \operatorname{Sin} \varphi^2}{1 - c^2}.$$

Anmerkung. Diese Substitutionen setzen überall nur solche Werthe von x voraus, für welche die Quadratwurzel auf der linken Seite reell bleibt. Die Annahme anderer Werthe von x würde, nach Weglassung des alsdann auftretenden Factors $\sqrt{-1}$, nur von einer dieser Formen auf die andere führen. —

Tafel III.

$$\sqrt{1-c^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2} = \Delta.$$

Reduction elliptischer Integrale.

$$\int \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi^{2k}\,\partial\varphi}{\Delta} = Z_{2k}. \qquad \text{(Leg. p. 11.)}$$

Reductionsformel:

$$(2k-3)Z_{2k-4}-(1+c^2)(2k-2)Z_{2k-2}+(2k-1)c^2 Z_{2k} = \Delta\,\mathrm{Cos}\,\varphi\cdot\mathrm{Sin}\,\varphi^{2k-3}.$$

Durch diese Formel werden die mit Z_{2k} bezeichneten Integrale, in welchen k eine beliebige, positive oder negative, ganze Zahl bezeichnet, sämmtlich auf Z_0 und Z_2, d. i. auf $\int\frac{\partial\varphi}{\Delta}$ und $\int\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi^2\,\partial\varphi}{\Delta}$ zurückgeführt. Für $k = 1$ erhält man:

$$\int\frac{\partial\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi^2\,\Delta} = c^2\int\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi^2\,\partial\varphi}{\Delta} - \Delta\,\mathrm{Cotang}\,\varphi.$$

$$\int\frac{\partial\varphi}{(1+n\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2)^k\,\Delta} = \Pi_k.$$

Reductionsformel:

$$(2k-2)\left(1+\frac{1+c^2}{n}+\frac{c^2}{n^2}\right)\Pi_k-(2k-3)\left[1+\frac{2(1+c^2)}{n}+\frac{3c^2}{n^2}\right]\Pi_{k-1}$$
$$+(2k-4)\left(\frac{1+c^2}{n}+\frac{3c^2}{n^2}\right)\Pi_{k-2}-(2k-5)\frac{c^2}{n^2}\Pi_{k-3} = \frac{\Delta\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{(1+n\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2)^{k-1}}$$

Durch diese Formel werden die Integrale Π_k, in welchen k eine positive ganze Zahl bezeichnet, sämmtlich auf

$$\Pi_0 = \int\frac{\partial\varphi}{\Delta},\quad \Pi_1 = \int\frac{\partial\varphi}{(1+n\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2)\Delta},\quad \Pi_{-1} = \int\frac{\partial\varphi}{\Delta}+n\int\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi^2\,\partial\varphi}{\Delta}$$

zurückgeführt. Man findet z. B. für $k = 2$

$$2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{c^2}{n}\right)\Pi_2 = \left[1+\frac{2(1+c^2)}{n}+\frac{3c^2}{n^2}\right]\Pi_1-\frac{c^2}{n^2}\Pi_{-1}+\frac{\Delta\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{1+n\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}.$$

Als besondere Fälle ergeben sich für $n = -1$ und für $n = -c^2$ folgende Formeln:

$$\sqrt{1-c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2} = \Delta.$$

Reduction elliptischer Integrale.

1) $n = -1$.

$$(2k-3)(1-c^2)\int\frac{\partial\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi^{2k-2}\Delta} = (2k-4)(1-2c^2)\int\frac{\partial\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi^{2k-4}\Delta}$$
$$+(2k-5)c^2\int\frac{\partial\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi^{2k-6}\Delta}+\frac{\Delta \operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi^{2k-3}}.$$

z. B. für $k = 2$: $(1-c^2)\int\frac{\partial\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi^2\Delta}+c^2\int\frac{\operatorname{Cos}\varphi^2\partial\varphi}{\Delta} = \Delta \operatorname{Tang}\varphi.$

2) $n = -c^2$.

$$(2k-3)\left(1-\frac{1}{c^2}\right)\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^{2k-1}} = (2k-4)\left(1-\frac{2}{c^2}\right)\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^{2k-3}}+\frac{2k-5}{c^2}\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^{2k-5}}$$
$$+\frac{\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi}{\Delta^{2k-3}}.$$

Für $k = 2$: $\left(1-\frac{1}{c^2}\right)\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^3}+\frac{1}{c^2}\int\Delta\partial\varphi = \frac{\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi}{\Delta}$, oder weil

$$\int\Delta\partial\varphi = \int\frac{\Delta^2\partial\varphi}{\Delta} = \int\frac{\partial\varphi}{\Delta}-c^2\int\frac{\operatorname{Sin}\varphi^2\partial\varphi}{\Delta},$$

$$\left(1-\frac{1}{c^2}\right)\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^3}+\frac{1}{c^2}\int\frac{\partial\varphi}{\Delta}-\int\frac{\operatorname{Sin}\varphi^2\partial\varphi}{\Delta} = \frac{\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi}{\Delta}.$$

Bezeichnet also Q eine rationale Function von $\operatorname{Sin}\varphi^2$, so wird das Integral $\int\frac{Q\partial\varphi}{\Delta}$ mit Hülfe vorstehender Formeln, und nach Weglassung seines algebraischen oder logarithmischen Theiles, auf Integrale folgender drei Formen zurückgeführt, nämlich:

$$\int\frac{\partial\varphi}{\Delta}\quad,\quad\int\frac{\operatorname{Sin}\varphi^2\partial\varphi}{\Delta}\quad,\quad\int\frac{\partial\varphi}{(1+n\operatorname{Sin}\varphi^2)\Delta}.$$

Der Coëfficient n im dritten Integrale heisst der Parameter.

Tafel IV.

$$\sqrt{1-c^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2} = \Delta.$$

Reduction elliptischer Integrale durch Verwandlung des Parameters.

1. **Lehrsatz.** Wenn der Parameter n reel, und sein positiver Werth grösser ist als c, so kann man ihn auf einen andern zurückführen, dessen positiver Werth kleiner ist als c. (Leg. p. 68.)

Beweis. Man setze $(1+n)\left(1+\frac{c^2}{n}\right) = \alpha$ und $\frac{\mathrm{Tang}\,\varphi}{\Delta} = p$. Entwickelt man aus diesen Ausdrücken den Werth von $\frac{\partial p}{1+\alpha p^2}$ und zerlegt denselben in einfache Brüche, so kommt:

$$\frac{\partial p}{1+\alpha p^2} = \frac{\partial\varphi}{\Delta}\left(\frac{1}{1+n\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2} + \frac{1}{1+\frac{c^2}{n}\mathrm{Sin}\,\varphi^2} - 1\right)$$

oder:
$$\int\frac{\partial\varphi}{(1+n\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2)\Delta} + \int\frac{\partial\varphi}{\left(1+\frac{c^2}{n}\mathrm{Sin}\,\varphi^2\right)\Delta} = \int\frac{\partial\varphi}{\Delta} + \int\frac{\partial p}{1+\alpha p^2},$$

wo die Integration nach p sich sofort ausführen lässt, nach deren Vollzug für p sein Werth $\frac{\mathrm{Tang}\,\varphi}{\Delta}$ einzusetzen ist. Wenn nun n, abgesehen vom Vorzeichen, grösser war als c, so ist $\frac{c^2}{n}$, abgesehen vom Vorzeichen, kleiner als c; mithin wird durch vorstehende Formel die Reduction bewirkt.

Anmerkung. Für $n = c$ und $n = -c$ findet man auf dem vorstehend angedeuteten Wege folgende Reductionen:

$$\int\frac{\partial\varphi}{(1+c\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2)\Delta} = \frac{1}{2}\int\frac{\partial\varphi}{\Delta} + \frac{1}{2(1+c)}\,\mathrm{Arc.\,Tang}\,\frac{(1+c)\,\mathrm{Tang}\,\varphi}{\Delta}.$$

$$\int\frac{\partial\varphi}{(1-c\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2)\Delta} = \frac{1}{2}\int\frac{\partial\varphi}{\Delta} + \frac{1}{2(1-c)}\,\mathrm{Arc.\,Tang}\,\frac{(1-c)\,\mathrm{Tang}\,\varphi}{\Delta}.$$

2. **Lehrsatz.** Wenn der Parameter n nicht reell ist, so lässt sich das Integral $\int\frac{\partial\varphi}{(1+n\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2)\Delta}$ auf zwei ähnliche Integrale mit reellen Parametern zurückführen. (Leg. p. 143.)

Beweis. Man setze $p = \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{(1+z\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2)\Delta}$, so wird:

Fortsetzung von Tafel IV.

$$\sqrt{1-c^2\operatorname{Sin}\varphi^2} = \Delta.$$

Reduction elliptischer Integrale durch Verwandlung des Parameters.

$$\frac{\partial p}{1+kp^2} = \frac{\partial\varphi}{\Delta}\cdot\frac{1-(2+z)\operatorname{Sin}\varphi^2+(1+2z)c^2\operatorname{Sin}\varphi^4-zc^2\operatorname{Sin}\varphi^6}{(1+z\operatorname{Sin}\varphi^2)^2(1-c^2\operatorname{Sin}\varphi^2)+k\operatorname{Sin}\varphi^2(1-\operatorname{Sin}\varphi^2)}. \qquad (\dagger)$$

In diesen Ausdrücken sind z und k unbestimmte Constanten. Man denke sich den vorstehenden Nenner in drei Factoren zerlegt, und setze demnach, einstweilen x für $\operatorname{Sin}\varphi$ schreibend,

$$(1+zx^2)^2(1-c^2x^2)+kx^2(1-x^2) = (1+nx^2)(1+n'x^2)(1+mx^2),$$

so erhält man durch Vergleichung der höchsten Potenzen von x auf beiden Seiten: $nn'm = -c^2z^2$. Ferner, indem man $x = 1$ und dann $x = \frac{1}{c}$ einsetzt, und $\sqrt{1-c^2}$ mit b bezeichnet:

$$(1+n)(1+n')(1+m) = b^2(1+z)^2 \quad , \quad (c^2+n)(c^2+n')(c^2+m) = -kb^2c^2.$$

Sind nun n und n′ gegeben, so kann man aus diesen drei Gleichungen m, k und z bestimmen. Man findet für z die Gleichung:

$$1 = \frac{c^2z^2}{nn'}+\frac{b^2(1+z)^2}{(1+n)(1+n')};$$

und hieraus

$$z = \frac{-b^2 \pm\sqrt{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n'})(c^2+n)(c^2+n')}}{b^2+c^2(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n'})};$$

ferner

$$m = -\frac{c^2z^2}{nn'} \quad , \quad k = \frac{-(c^2+n)(c^2+n')(c^2+m)}{b^2c^2}.$$

Es sei nun, ν als positiv vorausgesetzt,

$$n = \nu(\operatorname{Cos}\vartheta+i\operatorname{Sin}\vartheta) \quad \text{und} \quad n' = \nu(\operatorname{Cos}\vartheta-i\operatorname{Sin}\vartheta),$$

so sind die beiden Wurzeln der Gleichung in z nothwendig reell und ungleich. Man bezeichne sie mit z_1 und z_2, und die entsprechenden

Tafel IV. Fortsetzung.

$$\sqrt{1 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2} = \Delta.$$

Reduction elliptischer Integrale durch Verwandlung des Parameters.

Werthe von m und k mit m_1, m_2, k_1, k_2. Zerlegt man nun den obigen Ausdruck (*†) in einfache Brüche, so kommt:

$$\frac{\partial p}{1 + kp^2} = \frac{\partial\varphi}{\Delta}\left[\frac{1}{z} + \frac{A}{1 + n\operatorname{Sin}\varphi^2} + \frac{A'}{1 + n'\operatorname{Sin}\varphi^2} + \frac{B}{1 + m\operatorname{Sin}\varphi^2}\right],$$

wo

$$A = \frac{n^3 + (2 + z)n^2 + (1 + 2z)c^2 n + zc^2}{n(n - n')(n - m)},$$

$$A' = \frac{n'^3 + (2 + z)n'^2 + (1 + 2z)c^2 n' + zc^2}{n'(n' - n)(n' - m)},$$

$$B = \frac{m^3 + (2 + z)m^2 + (1 + 2z)c^2 m + zc^2}{m(m - n)(m - n')}.$$

In der vorstehenden Formel sind für z, m, k sowohl die Werthe z_1, m_1, k_1, als z_2, m_2, k_2 einzusetzen, wodurch zwei Gleichungen entstehen, durch welche, wie man sieht, die Integrale

$$\int \frac{\partial\varphi}{(1 + n\operatorname{Sin}\varphi^2)\Delta} \quad \text{und} \quad \int \frac{\partial\varphi}{(1 + n'\operatorname{Sin}\varphi^2)\Delta}$$

beide zugleich auf elliptische Integrale mit reellen Parametern m_1 und m_2 zurückgeführt werden. Eliminirt man aus beiden das Integral mit dem Parameter n', so ergiebt sich ein Ausdruck von folgender Gestalt:

$$\int \frac{\partial\varphi}{(1 + n\operatorname{Sin}\varphi^2)\Delta} = M_1 \int \frac{\partial\varphi}{(1 + m_1\operatorname{Sin}\varphi^2)\Delta} + M_2 \int \frac{\partial\varphi}{(1 + m_2\operatorname{Sin}\varphi^2)\Delta}$$
$$+ N \int \frac{\partial\varphi}{\Delta} + J,$$

wo J der logarithmische Theil des Integrals ist.

Auf diese Weise hat Legendre die Reduction des complexen Parameters $n = \nu(\operatorname{Cos}\vartheta + i\operatorname{Sin}\vartheta)$ auf die reellen Parameter m_1 und m_2 bewerkstelligt.

Tafel V.

Reduction elliptischer Integrale durch Verwandlung des Moduls.

Bezeichnungen: $\sqrt{1-c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2} = \Delta\,(c,\varphi)$, $\sqrt{1-c^2} = b$.
(b Complement des Moduls.)

$\sqrt{1-c'^2 \operatorname{Sin}\varphi'^2} = \Delta(c',\varphi')$, $\sqrt{1-c'^2} = b'$.

Setzt man $c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$ und $\operatorname{Sin}\varphi' = \frac{(1+c)\operatorname{Sin}\varphi}{1+c\operatorname{Sin}\varphi^2}$

so kommt $\frac{\partial\varphi'}{\Delta(c',\varphi')} = (1+c)\frac{\partial\varphi}{\Delta(c,\varphi)}$,

durch welche Formel eine elliptische Function mit dem Modul c' auf eine andere vom Modul c zurückgeführt wird.

Aus der Formel für $\operatorname{Sin}\varphi'$ findet man noch:

$$\operatorname{Cos}\varphi' = \frac{\Delta(c,\varphi)\operatorname{Cos}\varphi}{1+c\operatorname{Sin}\varphi^2}\;,\quad \Delta(c',\varphi') = \frac{1-c\operatorname{Sin}\varphi^2}{1+c\operatorname{Sin}\varphi^2}\,,$$

$$\sqrt{c}\operatorname{Sin}\varphi = \sqrt{\frac{1-\Delta(c',\varphi')}{1+\Delta(c',\varphi')}}.$$

$$\operatorname{Sin}2\varphi' = \frac{2(1+c)\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi\,\Delta(c,\varphi)}{(1+c\operatorname{Sin}\varphi^2)^2}\,,$$

$$c+\operatorname{Cos}2\varphi' = (1+c)\cdot\frac{\operatorname{Cos}\varphi^2-\operatorname{Sin}\varphi^2\Delta(c',\varphi')^2}{(1+c\operatorname{Sin}\varphi^2)^2}.$$

$$b' = \frac{1-c}{1+c}\;,\quad c = \frac{1-b'}{1+b'}\;,$$

$$\sqrt{c} = \frac{c'}{1+b'}\;,\quad b = \frac{2\sqrt{b'}}{1+b'}.$$

Da $2 > 1+c$, so ist $c' > \sqrt{c}$; also wird durch die Verwandlung von c' in c der Modul der Null genähert; durch die umgekehrte Verwandlung von c in c' wird der Modul der Einheit genähert. Auf diese Weise lässt sich aus einem gegebenen Modul durch wiederholte Verwandlung eine Reihe der steigenden und eine Reihe der fallenden Moduln herleiten; beide nähern sich sehr schnell ihren Grenzen 1 und 0.

Tafel VI.

Addition elliptischer Integrale von gleichem Modul.

$$\sqrt{1-c^2\operatorname{Sin}\varphi^2} = \Delta\varphi \quad , \quad \sqrt{1-c^2\operatorname{Sin}\psi^2} = \Delta\psi.$$

Lehrsatz. Das Integral der Differentialgleichung $\frac{\partial\varphi}{\Delta\varphi}+\frac{\partial\psi}{\Delta\psi} = 0$ ist in folgender Gleichung enthalten:

$$\frac{\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\psi\Delta\psi+\operatorname{Sin}\psi\operatorname{Cos}\varphi\Delta\varphi}{1-c^2\operatorname{Sin}\varphi^2\operatorname{Sin}\psi^2} = \text{Const.}$$

Beweis. Man bezeichne den vorstehenden Ausdruck linkerhand mit u, seinen Zähler mit A, seinen Nenner mit B, so ist

$$u = \frac{A}{B}; \quad \text{oder} \log u = \log A - \log B.$$

Von dieser Gleichung nehme man die partielle Ableitung nach φ, so kommt;

$$\frac{1}{u}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi} = \frac{P}{\Delta\varphi},$$

wo P folgenden Ausdruck vorstellt:

$$P = \frac{\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Cos}\psi\Delta\varphi\Delta\psi-(1-c^2)\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Sin}\psi}{A}$$

$$+\frac{2c^2\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}\psi\operatorname{Cos}\psi}{AB}(\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Sin}\psi\Delta\varphi\Delta\psi-\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Cos}\psi).$$

Bemerkt man nun, dass P eine symmetrische Function von φ und ψ, so folgt, dass auch

$$\frac{1}{u}\cdot\frac{\partial u}{\partial\psi} = \frac{P}{\Delta\psi}$$

sein muss; mithin ist

$$\frac{\partial u}{u} = P\left(\frac{\partial\varphi}{\Delta\varphi}+\frac{\partial\psi}{\Delta\psi}\right).$$

Da aber $u = \text{Const.}$, oder $du = 0$, so folgt

$$\frac{\partial\varphi}{\Delta\varphi}+\frac{\partial\psi}{\Delta\psi} = 0; \quad \text{w. z. b. w.}$$

Soll für $\varphi = 0$, $\psi = \mu$ werden, so wird Const. $= \operatorname{Sin}\mu$; die hiedurch entstehende algebraische Gleichung zwischen den trigonometrischen Functionen von φ, ψ, μ vertritt die Stelle der transscendenten Gleichung:

$$\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{\Delta\varphi}+\int_0^\psi\frac{\partial\psi}{\Delta\psi} = \int_0^\mu\frac{\partial\mu}{\Delta\mu}.$$

Fortsetzung von Tafel VI.

Addition elliptischer Integrale von gleichem Modul.

$$\sqrt{1-c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2} = \Delta\varphi \quad , \quad \sqrt{1-c^2 \operatorname{Sin}\psi^2} = \Delta\psi$$

Es ergeben sich daher folgende Relationen zwichen φ, ψ und μ.

$$\operatorname{Sin}\mu = \frac{\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\psi \Delta\psi + \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\varphi \Delta\varphi}{1 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Sin}\psi^2};$$

$$\operatorname{Cos}\mu = \frac{\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\psi - \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\psi \Delta\varphi \Delta\psi}{1 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Sin}\psi^2};$$

$$\Delta\mu = \frac{\Delta\varphi \Delta\psi - c^2 \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\psi}{1 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Sin}\psi^2};$$

$$\operatorname{Tang}\mu = \frac{\operatorname{Tang}\varphi \Delta\psi + \operatorname{Tang}\psi \Delta\varphi}{1 - \operatorname{Tang}\varphi \operatorname{Tang}\psi \Delta\varphi \Delta\psi}.$$

Ist insbesondere $\varphi = \psi$, oder

$$2\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^\mu \frac{\partial\mu}{\Delta\mu}.$$

so hat man für die Verdoppelung der elliptischen Functionen:

$$\operatorname{Sin}\mu = \frac{2 \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi \Delta\varphi}{1 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^4}.$$

$$\operatorname{Cos}\mu = \frac{\operatorname{Cos}\varphi^2 - \operatorname{Sin}\varphi^2 \Delta\varphi^2}{1 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^4}.$$

$$\Delta\mu = \frac{\Delta\varphi^2 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2 \operatorname{Cos}\varphi^2}{1 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^4}.$$

$$\operatorname{Tang}\mu = \frac{2 \operatorname{Tang}\varphi \Delta\varphi}{1 - \operatorname{Tang}\varphi^2 \Delta\varphi^2}.$$

$$\operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}\mu = \operatorname{Tang}\varphi \cdot \Delta\varphi.$$

Tafel VII.

Reduction elliptischer Integrale durch Verwandlung des Moduls verbunden mit Verdoppelung.

Bezeichnungen. c Modul, $b = \sqrt{1-c^2}$, $c_1 = \frac{1-b}{1+b}$,

$b_1 = \sqrt{1-c_1^2}$, $c_2 = \frac{1-b_1}{1+b_1}$, $b_2 = \sqrt{1-c_2^2}$, ...

$c, c_1, c_2, c_3, \dots$ die Reihe der fallenden Moduln; $b, b_1, b_2, \dots$ die Reihe ihrer Complemente.

Man hat auch:

$$c = \frac{2\sqrt{c_1}}{1+c_1}, \quad c_1 = \frac{2\sqrt{c_2}}{1+c_2}, \quad c_2 = \frac{2\sqrt{c_3}}{1+c_3} \dots; \quad b = \frac{1-c_1}{1+c_1}, b_1 = \frac{1-c_2}{1+c_2}, \dots$$

Lehrsatz. Berechnet man für einen gegebenen Werth von φ den Werth von φ_1 aus der Gleichung:

$$\operatorname{Tang}(\varphi_1 - \varphi) = b \operatorname{Tang}\varphi$$

so ist

$$\int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2}} = \frac{1}{1+b} \int_0^{\varphi_1} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c_1^2 \operatorname{Sin}\varphi^2}}.$$

Anmerkung. Bei dieser Berechnung muss der Werth von φ_1 so genommen werden, dass er mit φ zugleich, von Null anfangend, stetig wächst. Ist also $\operatorname{Tang}\beta = b \operatorname{Tang}\alpha$, wo $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$, und $\varphi = n\pi + \alpha$, so ist auch $\varphi_1 - \varphi = n\pi + \beta$; also $\varphi_1 = 2n\pi + \alpha + \beta$.

Beweis. Setzt man $\operatorname{Sin}\varphi = \frac{(1+c_1)\operatorname{Sin}\psi}{1+c_1 \operatorname{Sin}\psi^2}$,

so wird nach Tafel V.

$$\int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2}} = (1+c_1) \int_0^{\psi} \frac{\partial\psi}{\sqrt{1-c_1^2 \operatorname{Sin}\psi^2}}.$$

Setzt man ferner $\operatorname{Tang}\frac{1}{2}\varphi_1 = \operatorname{Tang}\psi \cdot \sqrt{1-c_1^2 \operatorname{Sin}\psi^2}$,

so wird nach Tafel VI. (am Ende)

$$\int_0^{\psi} \frac{\partial\psi}{\sqrt{1-c_1^2 \operatorname{Sin}\psi^2}} = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_1} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c_1^2 \operatorname{Sin}\varphi^2}}.$$

Durch Verbindung beider Substitutionen folgt:

Fortsetzung von Tafel VII.

Reduction elliptischer Integrale
durch Verwandlung des Moduls verbunden mit Verdoppelung.

$$\int_0^{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2}} = \frac{1 + c_1}{2} \int_0^{\varphi_1} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - c_1^2 \operatorname{Sin}\varphi^2}},$$

und zugleich $\frac{1 + c_1}{2} = \frac{1}{1 + b}$.

Die dieser Gleichung entsprechende zusammengesetzte Substitution erhält man durch Elimination von ψ aus den beiden vorigen Gleichungen. Man findet nach Tafel V., wenn $\sqrt{1 - c_1^2 \operatorname{Sin}\psi^2}$ mit $\Delta(c_1, \psi)$ bezeichnet wird:

$$\operatorname{Sin}2\varphi = \frac{(1 + c_1)\operatorname{Sin}2\psi\,\Delta(c_1, \psi)}{(1 + c_1 \operatorname{Sin}\psi^2)^2},$$

$$c_1 + \operatorname{Cos}2\varphi = (1 + c_1)\frac{\operatorname{Cos}\psi^2 - \operatorname{Sin}\psi^2 \Delta(c_1, \psi)^2}{(1 + c_1 \operatorname{Sin}\psi^2)^2},$$

und nach Tafel VI.

$$\operatorname{Sin}\varphi_1 = \frac{\operatorname{Sin}2\psi\,\Delta(c_1, \psi)}{1 - c_1^2 \operatorname{Sin}\psi^4}, \quad \operatorname{Cos}\varphi_1 = \frac{\operatorname{Cos}\psi^2 - \operatorname{Sin}\psi^2 \Delta(c^1, \psi)^2}{1 - c_1^2 \operatorname{Sin}\psi^4}.$$

Vergleicht man diese Werthe mit einander, so folgt:

$$(c_1 + \operatorname{Cos}2\varphi)\operatorname{Sin}\varphi_1 = \operatorname{Sin}2\varphi \operatorname{Cos}\varphi_1, \text{ oder } \operatorname{Sin}(2\varphi - \varphi_1) = c_1 \operatorname{Sin}\varphi_1$$

und hieraus durch Umstellung

$$\operatorname{Tang}(\varphi_1 - \varphi) = b \operatorname{Tang}\varphi, \text{ w. z. b. w.}$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Substitution wird der Modul c sehr schnell der Null genähert und dadurch der Werth des Integrals

$$\int_0^{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2}},$$

mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit erhalten. Berechnet man nämlich die Reihe der fallenden Moduln bis c_n, und die Werthe von $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ bis φ_n aus den Gleichungen:

$$\operatorname{Tang}(\varphi_1 - \varphi) = b \operatorname{Tang}\varphi, \quad \operatorname{Tang}(\varphi_2 - \varphi_1) = b_1 \operatorname{Tang}\varphi_1 \text{ u. s. f.},$$

Tafel VII. Fortsetzung.

Reduction elliptischer Integrale durch Verwandlung des Moduls verbunden mit Verdoppelung.

so ist, wenn man das Quadrat des sehr kleinen Moduls c_n vernachlässigt,

$$\int_0^{\varphi_n} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c_n^2 \operatorname{Sin}^2\varphi}} = \varphi_n$$

und
$$\int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2}} = \frac{\varphi_n}{(1+b)(1+b_1)(1+b_2)\cdots\cdots(1+b_{n-1})}.$$

Bedient man sich dagegen der Reihe der steigenden Moduln, nämlich $c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$, $c'' = \frac{2\sqrt{c'}}{1+c'}$, u.s.f., wobei $b' = \sqrt{1-c'^2}$, $b'' = \sqrt{1-c''^2}, \ldots$ so ergeben sich φ', φ'' u.s.f. aus den Gleichungen:

$$\operatorname{Sin}(2\varphi'-\varphi) = c \operatorname{Sin}\varphi,$$
$$\operatorname{Sin}(2\varphi''-\varphi') = c' \operatorname{Sin}\varphi', \text{ u.s.f.};$$

und dieselben geben:

$$\int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2}} = (1+b')\int_0^{\varphi'} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c'^2 \operatorname{Sin}\varphi^2}}$$

$$= (1+b')(1+b'')\int_0^{\varphi''} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c''^2 \operatorname{Sin}\varphi^2}} \text{ u.s.f.}$$

Wenn nun der Modul c^n der Einheit nahe genug ist, um $1-c^{n2} = b^{n2}$ vernachlässigen zu können, so findet sich angenähert:

$$\int_0^{\varphi^n} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^{n2} \operatorname{Sin}\varphi^2}} = \int_0^{\varphi^n} \frac{\partial\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi} = \log \operatorname{Tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi^n}{2}\right)$$

und
$$\int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2 \operatorname{Sin}\varphi^2}} = (1+b')(1+b'')(1+b''')\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots(1+b^n)\log \operatorname{Tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi^n}{2}\right).$$

Tafel VIII.

Reduction des allgemeinen elliptischen Integrals

$$H = \int_0^{\varphi}\left(A + \frac{B\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}{1+n\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\Delta(c,\varphi)}.\quad \text{(Legendre p. 118.)}$$

$$\sqrt{1-c^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2} = \Delta(c,\varphi)\quad,\quad \sqrt{1-c_1^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi_1^2} = \Delta(c_1,\varphi_1).$$

$$b = \sqrt{1-c^2}\quad,\quad c_1 = \frac{1-b}{1+b}.$$

Dieses Integral, in welchem A und B beliebige Constanten sind, umfasst die Tafel III. aufgezählten drei Arten der elliptischen Functionen.

Man berechne φ_1 aus der Gleichung $\mathrm{Tang}(\varphi_1-\varphi) = b\,\mathrm{Tang}\,\varphi$, so wird nach Tafel VII.

$$\frac{\partial\varphi}{\Delta(c,\varphi)} = \frac{1+c_1}{2}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\Delta(c_1,\varphi_1)}.$$

Zugleich giebt die vorstehende Gleichung zwischen φ_1 und φ für $\mathrm{Sin}\,\varphi^2$ folgenden Werth:

$$\mathrm{Sin}\,\varphi^2 = \tfrac{1}{2}(1 + c_1\,\mathrm{Sin}\,\varphi_1^2 - \Delta(c_1,\varphi_1)\mathrm{Cos}\,\varphi_1).$$

Durch Einsetzung dieser Ausdrücke verwandelt sich H in eine elliptische Function mit dem Modul c_1, nämlich:

$$H = \frac{1+c_1}{2}\left(H_1 - \frac{\frac{1}{2}B}{1+n}\int_0^{\varphi_1}\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi\,\partial\varphi}{1+n_1\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}\right),$$

wo H_1 ein neues Integral ist, nämlich:

$$H_1 = \int_0^{\varphi_1}\left(A_1 + \frac{B_1\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}{1+n_1\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\Delta(c_1,\varphi)},$$

und $n_1 = \dfrac{n(n+c^2)}{(1+b)^2(1+n)}$, $A_1 = A + \dfrac{\frac{1}{2}B}{1+n}$, $B_1 = \tfrac{1}{2}B\dfrac{c^2+2n+n^2}{(1+b)^2(1+n)^2}$.

Fortsetzung von Tafel VIII.

Reduction des allgemeinen elliptischen Integrals

$$H = \int_0^{\varphi} \left(A + \frac{B \operatorname{Sin} \varphi^2}{1 + n \operatorname{Sin} \varphi^2}\right) \frac{\partial \varphi}{\Delta(c, \varphi)}. \quad \text{(Legendre p. 118.)}$$

Nach Tafel IV. kann man immer annehmen, dass n reel ist und zwischen $-c$ und $+c$ liegt. Eine Folge hievon ist, dass $\frac{n + c^2}{c(1 + n)}$ zwischen -1 und $+1$, und dass mithin um so mehr

$$\frac{n_1 c}{n c_1} = \frac{c}{c_1(1 + b)^2} \cdot \frac{n + c^2}{1 + n} = \frac{c}{1 - b^2} \cdot \frac{n + c^2}{1 + n} = \frac{n + c^2}{c + cn}$$

ein ächter Bruch, oder $\frac{n_1}{c_1}$, abgesehen vom Vorzeichen, kleiner als $\frac{n}{c}$ ist. Folglich wird durch diese Transformation mit dem Modul zugleich auch der Parameter der Null näher gebracht. Und zwar nähert sich die Reihe der fallenden Parameter $n, n_1, n_2, \cdots$ noch schneller der Null, als die Reihe der fallenden Moduln $c, c_1, c_2, \cdots$, da jedes Glied der ersteren kleiner ist, als das entsprechende der andern.

Durch wiederholte Anwendung dieser Substitution lässt sich der Zahlenwerth von H mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit finden.

Druck von J. Petsch in Berlin.